Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 2. Mathématiques et Informatique

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGÈBRE LINÉAIRE

Cours Elisabeth Remm

Contrôle Continu Intermédiaire : CORRECTION

Espaces vectoriels, Applications linéaires

Exercice 1.

(1) Montrer que le sous-ensemble $E = \{(x, x+y, y, x-2y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^4$**.**

(2) Est-ce que le sous-ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que } xy = 1\}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^2$ **? On justifiera la réponse.**

1. L'ensemble E est un sous-ensemble du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. L'ensemble E est non vide (i.e $E \neq \emptyset$) puisqu'en prenant $x = 0 = y$ on a $(0, 0+0, 0, 0-2) = (0, 0, 0, 0) \in E$.

Soient $(x_1, x_1+y_1, y_1, x_1-2y_1), (x_2, x_2+y_2, y_2, x_2-2y_2) \in E$ où x_1, x_2, y_1, y_2 sont des éléments de $\mathbb{R}$. Alors

$$(x_1, x_1+y_1, y_1, x_1-2y_1)+(x_2, x_2+y_2, y_2, x_2-2y_2) = (x_1+x_2, x_1+x_2+y_1+y_2, y_1+y_2, x_1+x_2-2(y_1+y_2))$$

qui est de la forme

$$(x, x+y, y, x-2y)$$

avec $x = x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ et $y = y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$ donc $(x_1, x_1+y_1, y_1, x_1-2y_1) + (x_2, x_2+y_2, y_2, x_2-2y_2) = (x, x+y, y, x-2y) \in E$ ainsi la somme de deux éléments de E est encore dans E. Soit $(x, x+y, y, x-2y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\lambda(x, x+y, y, x-2y) = (\lambda x, \lambda x + \lambda y, \lambda y, \lambda x - 2\lambda y)$$

avec $(\lambda x, \lambda y \in \mathbb{R}$ donc c'est un élément de E. L'ensemble E est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$, non vide, stable par addition et par multiplication par un scalaire de $\mathbb{R}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. L'ensemble G qui est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. En effet il n'est pas satble pour l'addition. Pour le montrer il suffit d'exiber un contre exemple. Soient les éléments $(2, \frac{1}{2})$ et $(3, \frac{1}{3})$, ils appartiennent à E puisque $2 \times \frac{1}{2} = 1$ et $3 \times \frac{1}{3} = 1$. Mais

$$(2, \frac{1}{2}) + (3, \frac{1}{3}) = (5, \frac{5}{6})$$

n'appartient pas à E puisque $5 \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6} \neq 1$. L'ensemble G n'est donc pas stable par addition. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application donnée par son expression analytique

$$f(x, y) = (x - 2y, x + y, -3x + y, -2x + 3y).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Ecrire sa matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$.

(3) Déterminer son noyau. Cette application est-elle injective ?

(4) Quel est le rang de f. Déterminer une base de $\mathrm{Im}f$ et un supplémentaire de cet espace dans $\mathbb{R}^4$.

(5) Les espaces $\mathrm{Im}f$ et $\ker f$ sont-ils en somme directe ?

(1) Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de$\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
&f(u + v) = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f((x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\
&= (x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2, -3(x_1 + x_2) + y_1 + y_2, -2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)) \\
&= (x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2, -3x_1 + y_1 + (-3x_2 + y_2), -2x_1 + 3y_1 - 2x_2 + 3y_2) \\
&= (x_1 - 2y_1, x_1 + y_1, -3x_1 + y_1, -2x_1 + 3y_1) + (x_2 - 2y_2, x_2 + y_2, -3x_2 + y_2, -2x_2 + 3y_2) \\
&= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\
&= f(u) + f(v).
\end{aligned}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
&f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - 2\alpha y, \alpha x + \alpha y, -3\alpha x + \alpha y, -2\alpha x + 3\alpha y) \\
&= (\alpha(x - 2y), \alpha(x + y), \alpha(-3x + y), \alpha(-2x + 3y)) = \alpha(x - 2y, x + y, -3x + y, -2x + 3y) \\
&= \alpha f(x, y).
\end{aligned}$$

L'application f est donc bien linéaire.

(2) Soit $\mathcal{B}_2 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_4 = \{\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ La matrice de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ notée $M_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4}$ est obtenue en mettant les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la première colonne et les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la deuxième colonne. Or $f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1, -3, -2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4$ et $f(e_2) = f(0, 1) = (-2, 1, 1, 3) = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 3\varepsilon_4$ d'où

$$M_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) Le noyau de f est par définition $Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, 0, 0, 0)\}$ donc

$$(x, y) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y \\ x + y \\ -3x + y \\ -2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \{x = 0 = y \ .$$

Donc $Ker(f) = \{(0, 0\}$ et l'application est injective.

(4) D'après le théorème du rang, on a
$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim Ker(f) + rang(f)$$
d'où
$$rang(f) = 2 - 0 = 2.$$
Ainsi $Im(f)$ est de dimension 2 et puisqu'une l'image des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^2$ constitue une famille génératrice de $Im(f)$, $\{f(e_1), f(e_2)\} = \{v_1 = (1, 1, -3, -2), v_2 = (-2, 1, 1, 3)\}$ est aussi une base de $Im(f)$.

Un espace F est est un supplémentaire de $Im(f)$ dans $\mathbb{R}^4$ si c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ qui vérifie $F \oplus Im(f) = \mathbb{R}^4$ c'est-à-dire si F et $Im(f)$ sont en somme directe. ceci qui équivalent à dire qu'en concatennant une base de F et de $Im(f)$ on ait une base de de $\mathbb{R}^4$. Considérons les vecteurs $\{v_3 = \varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), v_4 = \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)\}$. La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
a pour déterminant $-9 + 2 = -7 \neq 0$ ce qui implique que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ainsi les espaces $Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\} = Im(f)$ et $F = Vect_{\mathbb{R}}\{v_3, v_4\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

L'espace $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et l'espace $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, ils ne peuvent donc pas être en somme directe.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(\overrightarrow{e_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}.$$

(1) Ecrire la matrice de f relative à la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$.

(2) Soit $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ecrire l'expression analytique de $f(\overrightarrow{X})$.

(3) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

(1) Soit M la matrice de l'endomorphisme f relative à la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$:
$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array}$$

(2) Soit $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calculons $f(\overrightarrow{X})$:
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{X}) &= f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + x_3 f(\overrightarrow{e_3}) \\ &= x_1(2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) + x_2(-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}) + x_3(-\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}) \\ &= (2x_1 - x_2 - x_3)\overrightarrow{e_1} + (-x_1 + x_2 + 3x_3)\overrightarrow{e_2} + (x_1 - 2x_2 - 2x_3)\overrightarrow{e_3} \\ &= (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3) \end{aligned}$$

L'expression analytique de f est donc
$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

(3) Une application linéaire f est bijective si et seulement si f est à la fois injectifve et surjectifve mais f est un endomorphisme,

$$f \text{ injectif } \Leftrightarrow f \text{ surjectif } \Leftrightarrow f \text{ bijectif}$$

En effet, $Ker(f) = \{(0,0,0)\} \Leftrightarrow \dim Ker(f) = 0$ et d'après le théorème du rang on a :

$$\dim Ker(f) = 0 \Leftrightarrow \dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker(f) = 3.$$

Ainsi $Im(f)$ est un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$ ce qui implique $Im(f) = \mathbb{R}^3$ et f est surjective. Ainsi pour un endomorphisme les notions d'injectivité et de surjectivité (et donc de bijectivité) sont équivalentes.

Déterminons donc le noyau de f.

$$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - 5x_3 = 0 \\ \qquad -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Ainsi $Ker(f)$ est réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et l'endomorphisme f est injectif donc surjectif donc bijectif.

On aurait aussi pu déterminer $Im(f)$. On sait que $Im(f) = Vect_{\mathbb{R}}\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), f(\overrightarrow{e_3})\}$ et que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Or $\det M = 2 \times (-2+6) + 1(2-3) - 1(2-1) = 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0$ donc M est aussi la matrice de changement de base de $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ à la base $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), f(\overrightarrow{e_3})\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^3$. Ceci veut dire que f est un endomorphisme surjectif donc injectif donc bijectif.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs dont les composantes dans la base canonique sont

$$\overrightarrow{U} = (-1,1,-1),\ \overrightarrow{V} = (0,2,1),\ \overrightarrow{W} = (2,-3,-1).$$

(1) La famille $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(2) Ecrire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ de la base canonique dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.

(3) Soit $\overrightarrow{X} = (1,1,1)$. Ecrire les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.

(4) Donner la matrice de l'application f de l'Exercice 3 dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$.

(1) La famille $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\det P = \det \begin{pmatrix} -1 & -0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace de dimension 3 donc s'ils sont libres ils forment une base) Or cette matrice a pour déterminant $-1 \times (-2-3) + 2 \times (-1+2) = 5 + 2 = 7 \neq 0$. Ainsi $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(2) La matrice P obtenue précédemment est la matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ à la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$. Pour obtenir les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ de la base canonique dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ on peut écrire la matrice de passage de la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, ce qui n'est autre que la matrice

$$P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \quad\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \overrightarrow{U} \\ \overrightarrow{V} \\ \overrightarrow{W} \end{matrix} \end{array}$$

On a alors $\overrightarrow{e_1} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{U} + \frac{4}{7}\overrightarrow{V} + \frac{1}{7}\overrightarrow{W}$, $\overrightarrow{e_2} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{U} + \frac{3}{7}\overrightarrow{V} - \frac{1}{7}\overrightarrow{W}$, $\overrightarrow{e_3} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{U} - \frac{1}{7}\overrightarrow{V} - \frac{2}{7}\overrightarrow{W}$,

(3) Soit $\overrightarrow{X} = (1, 1, 1)$. Ecrivons les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$. Le vecteur colonne des composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base canonique est

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne des composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$ est

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $\overrightarrow{X} = -\frac{11}{7}\overrightarrow{U} + \frac{6}{7}\overrightarrow{V} - \frac{2}{7}\overrightarrow{W}$.

(4) On connaît la matrice de l'application f de l'Exercice 4 dans la base canonique. On obtient $M' = M_{f,\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}}$ la matrice de l'application f dans la base $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\}$

$$M' = P^{-1}M_{f,\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}}P = P^{-1}MP$$

d'où

$$M' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$