FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 1 Physique-Chimie

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 3

Familles libres, familles génératrices. Bases

Table des matières

1. Dépendance et Indépendance linéaires

1.1. **Vecteurs linéairement dépendants. Vecteurs liés.** Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ désignant soit le corps des nombres réels soit celui des nombres complexes.

Définition 1. *Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ de E. On dit qu'ils sont linéairement dépendants s'il existe une relation linéaire*

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ et ces scalaires sont non tous nuls.

On dira aussi que la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une famille de vecteurs liés.

Exemples.

(1) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille des trois vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \overrightarrow{v_2} = (-1,2,1), \overrightarrow{v_3} = (1,2,3)$. Pour regarder si ces vecteurs sont linéairement dépendants, écrivons la relation

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \alpha_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

On obtient

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(-1,2,1) + \alpha_3(1,2,3) = (0,0,0).$$

Soit

$$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = (0,0,0).$$

On est amené à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & 0. \end{cases}$$

Ainsi $\alpha_3 = -\alpha_2$ et en reportant dans la première et troisième équation

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 & 0. \end{cases}$$

La première et troisième équation sont identiques. La solution du système est

$$\alpha_1 = 2\alpha_2, \ \alpha_3 = -\alpha_2$$

ce qui nous donne la relation linéaire

$$2\alpha_2\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} - \alpha_2\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

Prenons par exemple $\alpha_2 = 1$, on a la relation

$$2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

(2) Remarquons que trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont coplanaires.

(3) Il est parfois tentant d'écrire, pour montrer que trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires ou non, une relation du type

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

et d'en déduire, si $\alpha = \beta = 0$ qu'ils ne sont pas coplanaires ou linéairement dépendants. Mais ceci peut conduire à une erreur, apr exemple, si $\vec{a} = \vec{b}$ et $\vec{c}$ non linéairement dépendants avec $\vec{a}$. En règle générale pour montrer la linéaire dépendance ou non d'une famille de vecteur, il faut partir d'une relation du type écrite dans la définition.

1.2. **Vecteurs linéairement indépendants, vecteurs libres.** Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ désignant soit le corps des nombres réels soit celui des nombres complexes.

Définition 2. *Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ de E. On dit qu'ils sont linéairement indépendants si toute relation linéaire*

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

implique que tous les coefficients sont nuls : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$.

On dira aussi que la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est un système de vecteurs libres. Cette définition est équivalent à dire qu'un système de vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ de E est libre si et seulement si elle n'est pas liée.

Exemples

(1) Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de E. Alors la famille formée de ce seul vecteur est libre. En effet
$$\alpha \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$
implique puisque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\alpha = 0$.

(2) Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée. En effet soit $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ une famille de vecteur de E. Supposons $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$. Ces vecteurs vérifient la relation linéaire
$$\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$
et les coefficients de cette relation ne sont pas tous nuls. Ces vecteurs sont liés.

(3) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille des trois vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{v_2} = (-1, 2, 1), \overrightarrow{v_3} = (1, 2, 2)$. Pour regarder si ces vecteurs sont linéairement indépendants ou non, écrivons la relation
$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \alpha_3 \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$
On obtient
$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(-1, 2, 1) + \alpha_3(1, 2, 2) = (0, 0, 0).$$
Soit
$$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = (0, 0, 0).$$
On est amené à résoudre le système linéaire :
$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & 0. \end{cases}$$
Ainsi $\alpha_3 = -\alpha_2$ et en reportant dans la première et troisième équation
$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & 0. \end{cases}$$

La première équation donne $\alpha_1 = 2\alpha_2$, la troisième $\alpha_1 = \alpha_2$. On en déduit

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

et la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une famille libre.

1.3. **Quelques propriétés.**

Proposition 1. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une famille de vecteurs liés de E. Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de E, la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w}\}$ est aussi liée.*

Démonstration. En effet, comme les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ sont liés, il existe une relation linéaire

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

avec des coefficients $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls. On en déduit la relation

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{v_p} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

et dans cette relation les coefficients sont non tous nuls (même si celui attaché à $\overrightarrow{w}$ l'est). Ces vecteurs sont donc liés.

Corollaire 1. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une famille de vecteurs liés de E. Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}$ de E, la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}\}$ est aussi liée.*

Ainsi toute famille qui contient une sous-famille de vecteurs liés est aussi liée.

Proposition 2. *Tout système extrait d'un système libre de vecteurs de E est aussi libre.*

Démonstration. En effet, si un sous-système extrait d'un système libre était lié, d'après le corollaire ci-dessus, le système de départ serait aussi lié, ce qui est contraire à l'hypothèse.

1.4. **Rang d'un système de vecteurs de E.**

Considérons un système $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de p vecteurs de E. Si ce système est libre, tous les sous-systèmes sont libres. Supposons à présent que ce système soit lié et que les vecteurs ne soient pas tous nuls. Nous avons vu qu'un vecteur non nul forme un système libre. Ainsi le sytème donné contient au moins un sous-système libre. Considérons alors tous les sous système libre du système donné. L'ordre (le nombre de vecteurs) d'un tel sous-système est plus grand ou égal à 1 et strictement plus petit que p. Soit r le plus grand de ces ordres. Ainsi

(1) Tout sous-système de rang strictement plus grand que r est lié.
(2) Il existe un sous-système libre d'ordre r.

Théorème 1. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ un système de p vecteurs de E non tous nuls. Il existe un entier r possédant les propriétés suivantes :*

(1) Il existe un sous-système libre d'ordre r.
(2) Si $r < p$, alors tout sous-système de rang strictement plus grand que r est lié.

Ce nombre s'appelle le rang du système $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$.

2. Bases d'un espace vectoriel

Nous avons introduit la notion de base dans le premier chapitre, une base de $\mathbb{R}^3$ était définie comme une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, autrement dit linéairement indépendants. Nous allons généraliser cette notion aux espaces vectoriels quelconques. Dans un premier temps, revenons sur la notion de vecteurs générateurs.

2.1. **Espaces vectoriels de dimension finie.** Soit E un espace vectoriel. Rappelons qu'une famille finie $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite génératrice si pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que

$$\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{e_p}.$$

Autrement dit, tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille donnée.

Il n'existe pas toujours dans un espace donné des familles finies génératrices. Par exemple, l'espace vectoriel des fonctions réelles n'admet pas de telles familles finies.

Définition 3. *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille finie génératrice.*

Par exemple les espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont des espaces de dimension finie.

2.2. **Base d'un espace vectoriel.**

Définition 4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une famille finie $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est appelée une base de E si*
(1) cette famille est génératrice,
(2) cette famille est libre.

On déduit de cette définition :

(1) Si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de E, pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in E$ non nul, la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{w}\}$ est liée. En effet, comme une base est une famille génératrice, alors il existe des scalaires $\beta_1, \cdots, \beta_p$ non tous nuls tels que

$$\overrightarrow{w} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_p \overrightarrow{e_p}.$$

Ainsi, on a la combinaison linéaire à coefficients non tous nuls

$$\beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_p \overrightarrow{e_p} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Ceci signifie que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{w}\}$ est liée. Ainsi

Proposition 3. *Si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de E, alors c'est une famille libre maximale.*

(2) Si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de E, toute sous famille n'est pas une base. En effet considérons par exemple la sous famille $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$. Si c'est une base, elle est génératrice. Donc $\overrightarrow{e_1}$ se décompose sur cette famille génératrice, il existe donc des scalaires $\alpha_2, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls tels que

$$\overrightarrow{e_1} = \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{e_p}$$

et donc

$$\overrightarrow{e_1} - \alpha_2 \overrightarrow{e_2} - \cdots - \alpha_p \overrightarrow{e_p} = \overrightarrow{0}.$$

Ceci contredit le fait que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont linéairement indépendants.

Proposition 4. *Si* $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ *est une base de* E*, alors c'est une famille génératrice minimale.*

2.3. **Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.** Rappelons qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet un nombre fini de générateurs. On en déduit qu'il admet aussi une base.

Théorème 2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de* E *admettent le même nombre d'élémens. Ce nombre est appelé la dimension de* E *et noté* $\dim E$.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \cdots, \overrightarrow{e'_n}\}$ deux bases de E. Commençons par démontrer le résultat suivant :

Lemme 1. *Soient* $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\}$ *un système de vecteurs libres dans* E *et soit* $\{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}\}$ *un système de vecteurs générateurs de* E*. Alors*

$$k \leq l.$$

En effet par hypothèse, tout vecteur de E est combinaison linéaire des l vecteurs générateurs $\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}$. Mais on démontre par récurrence (voir Exercice) que toute famille de $l+1$ vecteurs qui s'écrivent tous comme combinaison linéaire des l vecteurs $\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_l}$ est une famille liée. Comme les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ sont combinaisons linéaires de ces k vecteurs alors comme ils sont libres, $l \leq k$.

Revenons à la démonstration du théorème. Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre et $\mathcal{B}'$ une famille génératrice, alors

$$p \leq n.$$

Comme $\mathcal{B}'$ est une famille libre et $\mathcal{B}$ une famille génératrice, alors

$$n \leq p.$$

Ainsi $n = p$. D'où le théorème.

Exemples

(1) L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. En effet les vecteurs $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ forment une base. La dimension étant le nombre d'élément d'une base, on a bien $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(2) De manière générale, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(3) Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré 2 :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ est une combinaison linéaire des trois polynômes $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2$. Montrons que ces polynômes sont linéairement indépendants. Soit une relation linéaire

$$\alpha_0 P_0(X) + \alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X) = 0$$

où 0 désigne le polynôme nul. On a donc

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 = 0.$$

Mais un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, soit

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Les vecteurs $P_0(X), P_1(X), P_2(X)$ sont bien linéairement indépendant et forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Ainsi

$$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3.$$

(4) Plus généralement on montre que si $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré n :

$$\mathbb{R}_n[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n, \ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

alors la famille $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1.$$

2.4. **Familles libres dans un espace vectoriel de dimension p.** Soit E un espace vectoriel de dimension p. Toute base admet donc p éléments.

Proposition 5. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\}$ une famille libre dans l'espace vectoriel E de dimension p. Alors*

$$k \leq p.$$

De plus

(1) Si $k = p$ alors la famille est une base.

(2) Si $k < p$, on peut trouver $p - k$ vecteurs non nuls $\overrightarrow{v_{k+1}}, \overrightarrow{v_{k+2}}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$ de E tels que

$$\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\,\overrightarrow{v_{k+1}}, \overrightarrow{v_{k+2}}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$$

soit une base de E.

Ce résultat se révèlera fort pratique pour déterminer des bases d'un espace vectoriel donné.

2.5. **Familles génératrices dans un espace vectoriel de dimension p.** Soit E un espace vectoriel de dimension p.

Proposition 6. *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\}$ une famille génératrice dans l'espace vectoriel E de dimension p. Alors*

$$k \geq p.$$

De plus

(1) Si $k = p$ alors la famille est une base.

(2) Si $k > p$, on peut extraire $k - p$ vecteurs non nuls parmi les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}$ de manière à récupérer une base de E.

Par exemple, si dans un espace vectoriel de dimension 2 nous avons une famille génératrice de 4 vecteurs, nous pouvons trouver parmi ces quatre vecteurs, deux qui forment une base de notre espace.

3. Bases de sous-espaces vectoriels

3.1. **Dimension d'un sous-espace vectoriel.** Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie. Il est clair que si $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ est une famille libre dans F elle reste libre dans E. On en déduit que toute base de F formera une famille libre dans E.

Théorème 3. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors*

(1) F est de dimension finie et
$$\dim F \leq \dim E$$
(2) Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Démonstration. Comme toute base de F forme une famille libre de E, et comme une base est une famille libre maximale, on en déduit $\dim F \leq \dim E$. Supposons maintenant que $\dim F = \dim E$. Alors toute base de F est une famille libre de E. De plus cette famille contient p éléments où $p = \dim E$. Elle est donc maximale et c'est une base de E. Ainsi E est engendrée par la base de F et donc $E = F$.

3.2. **Théorème de la base incomplète.**

Théorème 4. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie p. Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m}\}$ une base de F. Il existe $(p-m)$ vecteurs $\{\overrightarrow{e_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ linéairement indépendants de E tels que la famille*
$$\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{e_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$$
soit une base de E.

En effet, si $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m}\}$ est une base de F, c'est une famille libre dans E. Si $p > m$, elle n'est pas maximale. On peut donc la compléter pour obtenir une famille libre maximale dans E.

Exemple. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (-1, 0, 1)$. Ces deux vecteurs sont indépendants. En effet
$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}$$
est équivalent à
$$(\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_1) + (-\alpha_2, 0, \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0).$$
D'où le système
$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 & = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \end{cases}$$
ce qui donne $\alpha_1 = 0$ et donc $\alpha_2 = 0$. Ces deux vecteurs sont indépendants et forment une base de F. Complétons cette base de F en une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, cette nouvelle base contient trois vecteurs, il suffit donc de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ indépendant avec les deux vecteurs de F donés. Le choix est vaste ! Prenons par exemple $\overrightarrow{v_3} = (1, 2, 1)$. La famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (inutile de vérifier qu'ils sont générateurs car cette famille sera libre et maximale et donc une base). Nous avons vu au premier chapitre que pour vérifier que trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ étaient

indépendants il suffisait de voir que le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs était non nul. Ecrivons cette matrice (on met en colonne ces trois vecteurs)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut

$$\det M = 2 + 1 - 2 + 1 = 2 \neq 0.$$

On a bien une base de $\mathbb{R}^3$.

3.3. **Application à la somme directe de deux sous-espaces vectoriels.** Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie E. Ils sont supplémentaires

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

si et seulement si pour toute base $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}\}$ de F_1 et toute base $\{\overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_s}\}$ de F_2 alors la famillle

$$\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_m}, \overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_s}\}$$

est une base de E. Dans ce cas

$$\dim E = \dim F_1 + \dim F_2.$$

Remarque. Si les espaces F_1 et F_2 ne sont pas supplémentaires la propriété ci-dessus est fausse. S'ils ne sont pas supplémentaires mais s'ils vérifient

$$E = F_1 + F_2$$

c'est-à-dire tout vecteur de E s'écrit comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2, alors l'intersection de ces deux sous-espaces n'est pas réduite à $\{0\}$. Dans ce cas on a

$$\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

EXERCICES

Exercice 1. Soient $\overrightarrow{u} = (1,1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(1) Ecrire le vecteur $\overrightarrow{w} = (3,4)$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$.

(2) Montrer que la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est libre et déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par ces deux vecteurs.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,1), \overrightarrow{v} = (1,0,1), \overrightarrow{w} = (1,-1,1)$ et $\overrightarrow{t} = (0,1,0)$.

(1) Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$?

(2) Le vecteur $\overrightarrow{t}$ est-il combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$?

(3) Déterminer les sous-espace s vectoriels engendrés par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ puis par $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}$.

(4) Montrer que la famile $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\}$ est liée. En extraire une famille libre maximale.

Exercice 3. Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel E.

(1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants.

(2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 4. Préciser la dépendance linéaire des systèmes des vecteurs suivants appartenant à $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$:

(1) $(3,1), (1,2), (-1,1)$

(2) $(9,-3,7), (1,8,8), (5,-5,1)$

(3) $(1,2,-1,3), (-1,1,0,1), (0,3,1,2)$

Exercice 5. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré 3. Montrer que $P(X)$ et ses 3 dérivées sont linéairement indépendants dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = (1,1,1), \overrightarrow{u'} = (2,2,-4), \overrightarrow{v} = (1,0,2), \overrightarrow{w} = (2,1,0), \overrightarrow{t} = (-1,1,-6).$$

(1) Peut-on exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}$?

(2) La famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(3) Compléter la famille $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}\}$ en une une base de R^3.

Exercice 7. On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous-ensemble E formé des vecteurs $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant la relation

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En donner une base et sa dimension.

Exercice 8. Montrer que les familles suivantes sont liées, en extraire une famille libre maximale.

(1) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{\overrightarrow{u} = (1,0,2,0), \overrightarrow{v} = (1,-1,0,1), \overrightarrow{w} = (1,1,4,-1)\}$

(2) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré (au plus) 2 : $\{U(X) = 1, V(X) = X, W(X) = X^2 + 1, T(X) = (X-3)(X+1).\}$

(3) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles d'une variable réelle : $\{f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = \sin(x - 2\pi)\}$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous ensembles

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z - t = 0\}.$$

(1) Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

(2) Pour chacun d'eux, trouver une base et en déduire leur dimension.

(3) Déterminer une base de $F \cap G$. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 10. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ constitué des vecteurs (x, y, z, s, t) vérifiant le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ll} x + 2y + 2zs + 3t & = 0 \\ x + 2y + 2z - 2t & = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t & = 0 \end{array}\right.$$

Trouver une base et la dimension de F.