FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 1 Physique-Chimie

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 4

Composantes d'un vecteur dans une base. Changement de base

Table des matières

1. Composantes d'un vecteur dans une base

Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit $\mathbb{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Rappelons qu'une base est une famille libre et génératrice. La donnée de cette base va permettre de ramener tous les calculs linéaires sur les vecteurs de E en des calculs analogus à ceux que nous avons fait dans $\mathbb{R}^n$ si l'espace vectoriel est réel.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de E. La famille $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est nécessairement liée car une base est une famille libre maximale. Il existe donc une relation linéaire à coefficients non tous nuls

$$\alpha\overrightarrow{v} + \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{e_p} = 0.$$

Nécessairement $\alpha \neq 0$, sinon comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont indépendants, tous les autres coefficients α_i seraient nuls. Divisons donc par α et posons

$$x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}.$$

On obtient

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}.$$

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit $\mathbb{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E s'écrit de manière unique*

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}$$

avec $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$

Les sacalaires $x_1, x_2, \cdots, x_p$ s'appellent les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base donnée $\mathcal{B}$. Bien entendu ces composantes dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$. On pourra écrire

$$\overrightarrow{v} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}_{\mathcal{B}}$$

ou, si aucune confusion n'est possible quant à la base

$$\overrightarrow{v} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}.$$

Mais, si l'on utilise cette dernière notation, ne jamais oublier que le choix de la base $\mathcal{B}$ est sous-entendu.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ ce qui correspond aux composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base canonique $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$:

$$\overrightarrow{v} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

Considérons à présent les trois vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 0), \overrightarrow{e_2} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{e_3} = (0, 1, -1).$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En effet la matrice de ces trois vecteurs est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a $\det M = -2$. Donc ces vecteurs sont linéairement indépendants. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, trois vecteurs linéairement indépendants forment une famille libre maximale, c'est donc une base. Le vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ admet une décomposition dans cette base

$$\overrightarrow{v} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} + Z\overrightarrow{e_3}.$$

Nous pouvons calculer X, Y, Z en fonction de x, y, z. On a

$$\overrightarrow{v} = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2} + Z\overrightarrow{e_3} = X(1,1,0) + Y(-1,0,1) + Z(0,1,-1)$$

d'où

$$\overrightarrow{v} = (X-Y, X+Z, Y-Z) = (x,y,z).$$

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ll} X-Y & = x \\ X+Z & = y \\ Y-Z & = z. \end{array}\right.$$

On en déduit $Y = X - x, Z = y - X, X - x - (y - X) = z$ soit

$$X = \frac{x+y+z}{2}, Y = \frac{-x+y+z}{2}, Z = \frac{-x+y-z}{2}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{v} = \frac{x+y+z}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{-x+y+z}{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{-x+y-z}{2}\overrightarrow{e_3}$$

est la décomposition de $\overrightarrow{v}$ relative à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$.

2. Changement de base

Dans l'exemple précédent, nous avons présenté un premier exemple de changement de base. Soit E un espace vectoriel de dimension finie p. Etant donnée une base de E, chaque vecteur de E s'écrit comme sous forme de p composantes. Mais ces composantes dépendent de la base choisie. Le but de cette section est de voir comment calculer les composantes d'un vecteur dans une base donnée aux composantes de ce même vecteur dans une autre base.

2.1. **La matrice de passage.** Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Tout vecteur se décompose de façon unique dans cette base. Considérons une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$. Chacun de vecteurs $\overrightarrow{f_j}$ de cette nouvelle base se décompose dans la première base donnée :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{f_1} = \alpha_{1,1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,1}\overrightarrow{e_p} \\ \overrightarrow{f_2} = \alpha_{1,2}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,2}\overrightarrow{e_p} \\ \cdots \\ \overrightarrow{f_p} = \alpha_{1,p}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,p}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,p}\overrightarrow{e_p} \end{array}\right.$$

Ainsi $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \cdots, \alpha_{p,1})$ sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_1}$ relatives à la première base $\mathcal{B}$, $(\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \cdots, \alpha_{p,2})$ sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_2}$ relative à la base $\mathcal{B}$, ainsi de suite pour chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Nous avons besoin de deux indices pour numéroter chacune des composantes, le premier est relatif au numéro de la composante, le deuxième est lié à l'indice du vecteur.

Construction de la matrice de passage. Nous allons écrire toutes ces composantes sous la forme d'un tableau carré, appelé matrice carrée **en respectant l'ordre suivant**

- la première colonne du tableau est formée des composantes du premier vecteur $\overrightarrow{f_1}$ de la nouvelle base,
- la deuxième colonne du tableau est formée des composantes du deuxième vecteur $\overrightarrow{f_2}$ de la nouvelle base,
- etc...

— la dernière colonne (la p-ième) est formée des composantes du dernier vecteur $\overrightarrow{f_p}$ de la nouvelle base,

On obtient donc la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

Ainsi dans $\alpha_{i,j}$ le premier indice est celui de la ligne et le deuxième celui de la colonne.

Bien se rappeler, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ se construit en mettant en colonne les composantes des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ relative à la première base $\mathcal{B}$.

Définition 1. *La matrice P est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.*

2.2. **La matrice de passage inverse.** Considérons toujours nos deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ mais cette fois décomposons les vecteurs de la première base dans la deuxième. Si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$, chacun des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ de $\mathcal{B}$ se décompose dans la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \beta_{1,1}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,1}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,1}\overrightarrow{f_p} \\ \overrightarrow{e_2} = \beta_{1,2}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,2}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,2}\overrightarrow{f_p} \\ \cdots \\ \overrightarrow{e_p} = \beta_{1,p}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,p}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,p}\overrightarrow{f_p} \end{array} \right.$$

On construit comme précédemment une matrice en mettant en colonne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$: on obtient donc la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,p} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \cdots & \beta_{2,p} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} & \cdots & \beta_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \beta_{p,3} & \cdots & \beta_{p,p} \end{pmatrix}$$

Définition 2. *La matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est appelée la matrice inverse de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On la note aussi $Q = P^{-1}$.*

Remarque : Cas de la dimension 3. Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ de $\mathbb{R}^3$, nous avons construit au premier chapitre la matrice (carrée) de ces trois vecteurs. La propriété fondamentale de cette matrice était la suivante, si le déterminant est non nul, alors les trois vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment donc une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est donc la matrice de passage de la base canonique $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ à la nouvelle base $\{overrightarrowv_1, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$. Nous pouvons interpréter cette propriété en disant

Proposition 1. *Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ de $\mathbb{R}^3$, ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice de ces trois vecteurs a un déterminant non nul.*

Corollaire 1. *Une matrice carrée d'ordre* 3 *est une matrice de passage si et seulement si son déterminant est non nul.*

Nous allons généraliser cette propriété pour une dimension quelconque. mais pour cela il faut définir le déterminant d'une matrice carrée quelconque.

3. Matrices carrées

3.1. **L'espace vectoriel des matrices carrées.** On appelle matrice carrée réelle, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou complexe, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'ordre p tout tableau carré p lignes et p colonnes dont les éléments sont des scalaires de $\mathbb{K}$. On écrira une telle matrice sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ sont indexés par deux indices i, j, le premier désigne la ligne qui le contient et le deuxième la colonne qui le contient. Ainsi $a_{i,j}$ est sur la ligne numéro i et sur la colonne numéro j. Nous noterons par $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour simplifier, nous noterons également $A = (a_{i,j})$ une telle matrice.

Nous pouvons définir dans $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$

(1) Une addition : si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,p} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & b_{p,3} & \cdots & b_{p,p} \end{pmatrix}$$

alors $A + B$ est la matrice carrée d'ordre p

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} & \cdots & a_{2,p} + b_{2,p} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} & \cdots & a_{3,p} + b_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} + b_{p,1} & a_{p,2} + b_{p,2} & a_{p,3} + b_{p,3} & \cdots & a_{p,p} + b_{p,p} \end{pmatrix}$$

(2) Une multiplication externe : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K}),$$

alors

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \lambda a_{1,3} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \lambda a_{2,3} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \lambda a_{3,1} & \lambda a_{3,2} & \lambda a_{3,3} & \cdots & \lambda a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{p,1} & \lambda a_{p,2} & \lambda a_{p,3} & \cdots & \lambda a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension p^2, une base étant donnée par les p^2 matrices distinctes dont tous les coefficients sont nuls exceptés un qui vaut 1.

3.2. **Le déterminant d'une matrice carrée.** Nous avons déjà défini cette notion pour les matrices d'ordre 2 et 3 :

(1) Si
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
alors
$$\det A = ad - bc.$$

(2) Si
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
alors
$$\det A = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$
calculé avec la règle de Sarrus, ou bien
$$\det A = a_1 (\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}) - a_2 (\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}) + a_3 (\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix})$$
calculé avec la règle de Cramer.

C'est cette dernière formule qui va nous permettre d'écrire la définition dans le cas quelconque. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$.

Définition 3. *Pour chacun des coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A, le mineur $m(a_{i,j}$ (que nous noterons aussi en majuscule $A_{i,j}$ si cela n'entraîne aucune confusion) de $a_{i,j}$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $p-1$ obtenu en enlevant à A la ligne et la colonne contenant le coefficient $a_{i,j}$, c'est-à-dire la ligne i et la colonne j.*

Eexemple, $p = 3$. si
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
alors, par exemple,
$$A_1 = \det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = b_2 c_3 - b_3 c_2, \; A_2 = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} = b_1 c_3 - b_3 c_1.$$
La formule de Cramer donnant le déterminant se résume alors à
$$\det A = a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3.$$

Définition 4. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre p. Choisissons une ligne, par exemple la ligne numéro i. Alors

$$\det A = (-1)^{i+1j} a_{i,1} A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} A_{i,2} + (-1)^{i+3} a_{i,3} A_{i,3} + \cdots + (-1)^{i+p} a_{i,p} A_{i,p}.$$

Remarque : sur le choix de la ligne La formule donnant le déterminant donne le même résultat quelle que soit la ligne choisie (heureusement !). On aura donc intérêt à choisir la ligne comportant le maximum de 0. En particulier si A contient une ligne n'ayant que des 0, son déterminant est nul.

La définition ci-dessus s'interprète comme un développement du déterminant suivant une ligne. On peut donner une définition analogue mais liée à un développement suivant une colonne.

Définition 5. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre p. Choisissons une colonne, par exemple la ligne numéro j. Alors

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1,j} A_{1,j} + (-1)^{i2+j} a_{2,j} A_{2,j} + (-1)^{3+j} a_{3,j} A_{3,j} + \cdots + (-1)^{p+j} a_{p,j} A_{p,j}.$$

Exemple. Calcul du déterminant de la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & -10 & -4 \\ -4 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Développons par rapport à la première ligne (elle contient un 0) :

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 0 + (-2) \det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculons les déterminants d'ordre 3 par la règle de Sarrus :

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 30 - 48 + 40 + 100 - 96 - 6 = 20$$

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 - 48 + 50 + 20 - 24 + 15 = 10$$

$$\det\begin{pmatrix}-3 & -3 & 6\\ 5 & 1 & -10\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix} = -24-120+60+24+120-60=0.$$

Ainsi

$$\det A = 20-20+0=0.$$

On peut déduire que les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ correspondant aux quatre colonnes sont liés.

3.3. **Le calcul du déterminant en utilisant PYTHON.** Dans PYTHON appeler le module NUMPY qui est une librairie permettant de faire du calcul matriciel et utili ser la fonction "det" pour calculer le déterminant de la matrice.

```
>>> import numpy as np
>>> x = np.array([1, 2, 3], [3, 4, 5], [5, 6,7])
>>> x
array([1, 2, 3],[3, 4, 5], [5, 6,7])
```

Pour calculer le déterminant, on rajoute la commande

```
>>> np.linalg.det(a)
```

4. Propriétés de la matrice de changement de base

4.1. **Déterminant de la matrice de passage d'une base à une autre.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Considérons une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ et soit P la matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Rappelons que cette matrice est construite en mettant en colonne successivement les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_1}$ relatives à la base $\mathcal{B}$, puis celles de $\overrightarrow{f_2}$, etc pour finir par celles de $\overrightarrow{f_p}$. Soit

$$P = \begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p}\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p}\\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p}\end{pmatrix}$$

cette matrice. On a alors

$$\det P \neq 0.$$

Théorème 2. *Soient E un espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ vérifie*

$$\det P \neq 0.$$

Etudions la réciproque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Considérons une famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de p vecteurs ($p = \dim E$). Déterminons les composantes de chacun de ces vecteurs :

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_1} = a_{1,1}\overrightarrow{e_1} + a_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,1}\overrightarrow{e_p}\\ \overrightarrow{v_2} = a_{1,2}\overrightarrow{e_1} + a_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,2}\overrightarrow{e_p}\\ \cdots\\ \overrightarrow{v_P} = a_{1,p}\overrightarrow{e_1} + a_{2,p}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,p}\overrightarrow{e_p}\end{cases}$$

et écrivons ces composantes en colonnes. On obtient la matrice de ces p vecteurs relative à la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Théorème 3. *La famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une nouvelle base de E si et seulement si*

$$\det M \neq 0.$$

On a donc une procédé assez simple pour vérifier si p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension p sont linéairement indépendants et constituent une base de cet espace.

4.2. **Formule du changement de composantes.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ une nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E. Il admet une décomposition unique relative à la base $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}.$$

Ainsi $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathcal{B}$. De même, ce même vecteur admet une décomposition unique relative à la base $\mathcal{B}'$:

$$\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{f_p}.$$

Ainsi $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathcal{B}'$.. Le théorème suivant décrit les relations entre les coordonnées relatives à la base $\mathcal{B}$ et celles relatives à la base $\mathcal{B}'$:

Théorème 4. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ deux bases de E et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E et soient*

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}, \quad \overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{f_p}$$

ses décompositions relatives aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Sur ce produit de matrices. Développons la formule ci-dessus : ses décompositions relatives aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

La première matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

est une matrice de p lignes et une seule colonne. On dira une matrice de type $n \times 1$. La matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée de type $p \times p$ et enfin la troisième matrice

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

est de nouveau une matrice (rectagulaire) de type $p \times 1$. Comment fait-on le produit $P \cdot Y$?. Notons dès à présent qu'en général le produit d'une matrice quelconque rectangulaire par un autre est impossible. Pour pouvoir effectuer le produit d'une matrice A par une matrice B, noté $A \cdot B$, il faut que

le nombre de colonnes de A= nombres de lignes de B

Dans ce cas si A est une matrice de type $m/timesn$ et B de type $n \times q$ alors $A \cdot B$ est une matrice de type $m \times q$ (m=nombres de lignes de A et q nombre de colonnes de B.

On peut remarquer que si cette condition est remplie, alors $A \cdot B$ exsite, mais pas nécessairement $B \cdot A$.

Revenons aux matrices P et Y. Le nombre de colonnes de P est bien égal à p et le nombre de lignes de Y aussi. Donc le produit $P \cdot Y$ existe et le résultat X sera bien une matrice $p \times 1$.

Calcul de la matrice X. Le premier coefficient est en fait le produit scalaire de la première ligne $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \end{pmatrix}$ de P par le vecteur donné par Y soit $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_p \end{pmatrix}$ ce qui donne

$$x_1 = \alpha_{1,1}y_1 + \alpha_{1,2}y_2 + \alpha_{1,3}y_3 + \cdots + \alpha_{1,p}y_p.$$

Le deuxième coefficient sera donné par le produit scaaire du vecteur de la deuxième ligne de P par Y ainsi de suite jusqu'au dernier coefficient x_p donné par le produit scalaire de la dernière ligne de P par le vecteur donné par Y.

Exemple Calculons le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le produit scalaire du vecteur $(1, -1, 3)$ par le vecteur $(1, 2, 3)$ est $1 - 2 + 9 = 8$. Celui de $(2, -1, 4)$ par $(1, 2, 3)$ est $2-2+12 = 12$ et celui de $(-5, 2, 6)$ par $(1, 2, 3)$ vaut $-5+4+18 = 17$.

Ainsi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Exercice corrigé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$..Soit $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(2) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

Solution.

(1) La matrice des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ décomposés dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit en mettant en colonne les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $\mathcal{B}$, puis celles de $\overrightarrow{e_2}$ et enfin celles de $\overrightarrow{e_3}$. On a

$$\det P = 3 + 4 - 1 - 6 + 2 - 1 = 1 \neq 0$$

ce qui implique que les trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sont linéairement indépendants. Comme $\dim E = 3$, ces trois vecteurs indépendants forment une base de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice P.

(2) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composantes dans la base $\mathcal{B}$ $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$. Soient $y_1, y_2, y_"$ les composantes de ce même vecteur dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$:

$$\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}.$$

Les relations entre ces nouvelles composantes et les anciennes sont décrits par la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Développons cette relation matricielle en effectuant le produit des deux matrices comme décrit ci-dessus :

$$\begin{cases} 1 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 0 = -y_1 + 3y_2 + y_3 \\ 1 = 2y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, nous savons que nous pouvons remplacer une ligne par cette ligne plus une combinaison linéaire des autres lignes. Cette remarque permet de trouver les solutions en se basant sur le pivot de Gauss qui consiste à éliminer la première variable dans les équations 2 et 3 puis la deuxième dans la troisième équation, on en déduira la valeur de la dernière variable les autres s'en déduisent :

— On garde la première équation L_1 et on remplace la deuxième L_2 par $L_2 + L_1$ et la troisième par $L_3 - 2L_1$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} L_1 & 1 & = y_1 & +2y_2 & +y_3 \\ L_2 + L_1 & 1 & = 0 & +5y_2 & +2y_3 \\ L_3 - 2L_1 & -1 & = 0 & -3y_2 & -y_3 \end{array}\right.$$

— On garde, dans le nouveau système L_1, L_2 et on remplace L_3 par $5L_3 + L_2$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} L_1 & 1 & = y_1 & +2y_2 & +y_3 \\ L_2 & 1 & = 0 & +5y_2 & +2y_3 \\ 5L_3 + 3L_2 & -2 & = 0 & 0 & +y_3 \end{array}\right.$$

On en déduit

$$y_3 = -2$$

puis L_2 s'écrit $1 = 5y_2 - 4$ soit

$$y_2 = 1$$

et enfin L_1 donne $1 = y_1 + 2 - 2$ soit

$$y_1 = 1.$$

Ainsi les composantes de $\overrightarrow{u}$ relatives à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\}$ sont $(1, 1, -2)$.

(3) Remarquons que l'équation matricielle ne permet pas d'écrire directement les nouvelles composantes. Si P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, on aura alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous devons calculer la matrice P^{-1} dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ relatives à la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\ 5(\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}) - 2(\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$$

et la deuxième équation donne

$$\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3(-\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3})$$

soit

$$5\overrightarrow{j} = -5\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 15\overrightarrow{e_3}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}.$$

Enfin la première équation donne

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - (-\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}) + 2(-\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3})$$

soit

$$\overrightarrow{i} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 7\overrightarrow{e_3}$$

Ecrivons les composantes de ces trois vecteurs en colonne, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2-7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On retrouve le résultat.