FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2 Mathématiques.

Mathématiques: ALGEBRE LINEAIRE II

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 5

La décomposition $M = D + N$

1. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme

1.1. **Rappel: Décomposition associée à un endomorphisme diagonalisable.**

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne le corps des complexes ou le corps des réels. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{E}nd(E)$ un endomorphisme de E. Supposons que f soit diagonalisable. Ceci est équivalent à dire:

(1) f admet n valeurs propres distinctes ou confondues (condition toujours réalisée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de f et $r_1, \cdots, r_p$ leur multiplicité respective. Alors $r_1 + \cdots + r_p = n$.
(2) Soit E_{λ_i} l'espace propre de f associé à la valeur propre λ_i. Alors
$$\dim E_{\lambda_i} = r_i.$$

Ces conditions sont équivalentes à

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{E}nd(E)$ un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisablesi et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:*
(1) *f admet n valeurs propres distinctes ou confondues. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de f.*
(2) *$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.*

Cette décomposition de E en somme directe des sous-espaces propres de f signifie qu'il existe une base $\{v_{\lambda_1,1}, v_{\lambda_1,2}, \cdots, v_{\lambda_1,r_1}\}$ de E_{λ_1}, une base $\{v_{\lambda_2,1}, v_{\lambda_2,2}, \cdots, v_{\lambda_2,r_2}\}$ de E_{λ_2}, $\cdots$, une base $\{v_{\lambda_p,1}, v_{\lambda_p,2}, \cdots, v_{\lambda_p,r_p}\}$ de E_{λ_p} telles que
$$\{v_{\lambda_1,1}, \cdots, v_{\lambda_1,r_1}, v_{\lambda_2,1}, \cdots, v_{\lambda_2,r_2}, \cdots, v_{\lambda_p,1}, \cdots, v_{\lambda_p,r_p}\}$$

soit une base de E. De plus, la matrice de f relative à cette base est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Remarque: Cas où f n'est pas diagonalisable. Supposons que f admette n valeurs propres distinctes ou confondues et soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ l'ensemble des valeurs propres deux-à-deux distinctes. Supposons aussi que ne soit pas diagonalisable. Ceci signifie qu'il existe au moins une valeur propre λ_k pour laquelle

$$\dim E_{\lambda_k} < r_k$$

où r_k est la multiplicité de λ_k. Or on a vu que si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors

$$E_{\lambda_i} \bigcap E_{\lambda_j} = \{0\}$$

et plus généralement que la somme des sous-espaces $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est toujours directe. Sous nos hypothèses, dire que f n'est pas diagonalisable signifie que

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

est un sous-espace propre de E.

1.2. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme ayant n valeurs propres.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{E}nd(E)$ un endomorphisme de E. Supposons que f admette n valeurs propres distinctes ou confondues (condition toujours réalisée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de f et $r_1, \cdots, r_p$ leur multiplicité respective. Alors $r_1 + \cdots + r_p = n$. Le polynôme caractéristique de f se décompose ainsi:

$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}.$$

Définition 1. *On appelle sous-espace caractéristique de f attaché à la valeur propre λ_i ($i = 1, \cdots, p$), le sous-espace vectoriel de E, noté $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$ défini par:*

$$\mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n)^{r_i}.$$

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice relative à la base canonique:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_f(X) = C_M(X) = -(X+1)^2(X-3).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$, racine simple et $\lambda_2 = -1$, racine double. Calculons les sous-espaces caractéristiques.

$$\mathcal{C}_{\lambda_1}(f) = \ker(f - 3I_3).$$

Comme la multiplicité est égale à 1, on a donc

$$\mathcal{C}_{\lambda_1}(f) = E_{\lambda_1}.$$

Cet espace est de dimension 1, une base est donnée par $\{v_1 = (1,2,2)\}$. Concernant la valeur propre $\lambda_2 = -1$, on a

$$\mathcal{C}_{\lambda_2}(f) = \ker(f + I_3)^2$$

alors que le sous-espace propre est

$$E_{\lambda_2}(f) = \ker(f + I_3).$$

On a $\dim E_{\lambda_2}(f) = 1$, une base de ce sous-espace est donnée par $\{v_1 = (1,2,1)\}$. On en déduit que

$$F = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$$

est de dimension 2 et $\{v_1, v_2\}$ en est une base. Déterminons $\mathcal{C}_{\lambda_2}(f)$.

$$(M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système

$$\begin{cases} 16x - 16y + 16z = 0 \\ 32x - 32y + 32z = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{C}_{\lambda_2}(f) = \ker(f + I_3)^2 = \{(x, y, -x+y), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Il est de dimension 2, la famille $\{v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)\}$ en est une base. Comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a:

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{C}_{\lambda_1}(f) \oplus \mathcal{C}_{\lambda_2}(f).$$

Remarque. Si v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, il vérifie $(f - \lambda I_n)(v) = 0$ et donc aussi $(f - \lambda I_n)^k(v) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Ainsi $v \in \mathcal{C}_\lambda(f)$ et donc

$$E_\lambda(f) \subset \mathcal{C}_\lambda(f).$$

Comme $\dim E_\lambda(f) \geq 1$, on en déduit que $\dim \mathcal{C}_\lambda(f) \geq 1$.

2. Théoème spectral

2.1. **Théorème spectral.**

Théorème 2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes ou confondues. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes. Alors*
$$E = \mathcal{C}_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{\lambda_p}(f)$$
où $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$ est l'espace caractéristique attaché à la valeur propre λ_i.

Démonstration. Par hypothèse le polynôme caractéristique s'écrit
$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}$$
Posons $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{r_i}$ et $Q_i(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_{i-1})^{r_{i-1}} (X - \lambda_{i+1})^{r_{i+1}} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}$. Ainsi
$$C_f(X) = (-1)^n P_i(X) Q_i(X).$$
Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ quand $i \neq j$, les polynômes $Q_i(X)$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout il existe des polynômes $h_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$h_1(X)Q_1(X) + \cdots + h_p(X)Q_p(X) = 1.$$
Considérons alors les endomorphismes suivants:
$$\begin{cases} f_i = P_i(f), \\ g_i = Q_i(f) \\ l_i = h_i(f) \end{cases}$$
Comme
$$h_1(X)Q_1(X) + \cdots + h_p(X)Q_p(X) = 1$$
on a
$$h_1(f) \circ Q_1(f) + \cdots + h_p(f) \circ Q_p(f) = I_n$$
c'est-á-dire
$$l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p = I_n.$$
Ainsi pour tout veceur $v \in E$ on a
$$(l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v) = v.$$
Mais les endomorphismes f_i et g_i vérifient
$$f_i \circ g_i = C_f(f) = 0$$
d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On en déduit
$$f_i \circ g_i \circ l_i = 0.$$
Mais $f_i \circ g_i \circ l_i = P_i(f) \circ Q_i(f) \circ h_i(f) = (P_i Q_i h_i)(f)$. Comme le produit des polynômes est commutatif, $(P_i Q_i h_i)(f) = (P_i h_i Q_i)(f) = f_i \circ l_i \circ g_i$ et donc
$$f_i \circ g_i \circ l_i = f_i \circ l_i \circ g_i = 0.$$
Ainsi pour tout $v \in E$ on a
$$(l_i \circ g_i)(v) \in Ker(f_i) = \mathcal{C}_{\lambda_i}.$$

Mais le vecteur v admet la décomposition

$$v = (l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v).$$

On en déduit que

$$E = \mathcal{C}_{\lambda_1}(f) + \cdots + \mathcal{C}_{\lambda_p}(f).$$

Montrons que cette décomposition est directe. Comme E est la somme des sous-espaces caractéristiques, tout vecteur v de E se décompose sous la forme

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$$

avec $v_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$, $i = 1, \cdots, k$. Pour montrer que la somme des sous-espaces caractéristiques est directe, il faut montrer que cette décomposition est unique. Calculons $g_1(v)$. Comme

$$g_1 = Q_1(f) = (f - \lambda_2 I_n)^{r_2} \circ (f - \lambda_3 I_n)^{r_3} \circ \cdots \circ (f - \lambda_p I_n)^{r_p}$$

et comme les facteurs $(f - \lambda_i I_n)^{r_i}$ commutent deux-à-deux, on a

$$g_1(v_i) = 0, \ i \neq 1.$$

En effet $v_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n)^{r_i}$. Ainsi

$$g_1(v) = g_1(v_1).$$

On en déduit

$$(l_1 \circ g_1)(v) = (l_1 \circ g_1)(v_1).$$

Or, nous avons vu que pour tout vecteur $v \in E$, on a $(l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v) = v$. En particulier $(l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v_1) = v_1$. Mais $g_i(v_1) = 0$ dès que $i \neq 1$. Ainsi

$$v_1 = l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v_1) = (l_1 \circ g_1)(v_1).$$

On obtient donc

$$v_1 = (l_1 \circ g_1)(v).$$

De même, nous aurons

$$v_i = (l_i \circ g_i)(v), \quad i = 1, \cdots, p.$$

La décomposition $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$ est donc égale à

$$v = (l_1 \circ g_1 + \cdots + l_p \circ g_p)(v)$$

et cette décomposition est bien unique.

2.2. **Dimension des sous-espaces caractéristiques.**

Théorème 3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes ou confondues. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de multiplicité respective $r_1, \cdots, r_i$. Alors*

$$\dim \mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = r_i$$

pour tout $i = 1, \cdots, p$.

Démonstration. D'après la définition de l'endomorphisme f_i on a $\mathcal{C}_\lambda(f) = Ker(f_i)$. Comme $f \circ f_i = f_i \circ f$ l'espace caractéristique $\mathcal{C}_\lambda(f)$ est invariant par f:

$$f(\mathcal{C}_\lambda(f)) \subset \mathcal{C}_\lambda(f).$$

La restriction $\widetilde{f_i}$ de f a $\mathcal{C}_\lambda(f)$ est donc un endomorphisme de $\mathcal{C}_\lambda(f)$. Or le polynôme caractéristique $C_{\widetilde{f_i}}(X)$ divise $C_f(X)$. Ainsi le polynôme $C_{\widetilde{f_i}}(X)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ il est donc trigonalisable dans $\mathcal{C}_{\lambda_i}$. Il existe donc une base de $\mathcal{C}_{\lambda_i}$ par rapport à laquelle la matrice de $\widetilde{f_i}$ est du type

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \star & \star & \star \\ 0 & \lambda_i & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

En effet tous les éléments de la diagonale sont égaux à λ_i car $(\widetilde{f_i} - \lambda_i I)^{r_i} = 0$, par définition de l'espace caractéristique $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$. Ainsi l'ordre de cette matrice, qui est la dimension de $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$ est inférieure ou égale à r_i:

$$\dim \mathcal{C}_{\lambda_i}(f) \leq r_i.$$

Or, d'après le Théorème 5

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n \\ \dim \mathcal{C}_{\lambda_1}(f) + \cdots + \dim \mathcal{C}_{\lambda_p}(f) = n. \end{cases}$$

Ainsi

$$\dim \mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = r_i$$

pour $i = 1, \cdots, p$.

3. Un critère de diagonalisation donné par le polynôme minimal

3.1. Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal.

Théorème 4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes ou confondues. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes. Alors si*

$$\mathfrak{m}_f(X) = (X - \lambda_1)^{s_1}(X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_p)^{s_p}$$

est le polynôme minimal de f, les sous-espaces caractéristiques attachés aux valeurs propres de f vérifient:

$$\mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i}$$

pour tout $i = 1, \cdots, p$.

Démonstration. Soit $C_f(X)$ le polynôme caractéristique de f:

$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1}(X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}$$

et $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n)^{r_i}$. Par hypothèse, le polynôme minimal de f s'écrit:

$$\mathfrak{m}_f(X) = (X - \lambda_1)^{s_1}(X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_p)^{s_p}$$

et $1 \leq s_i \leq r_i$ pour tout $i = 1, \cdots, p$. Montrons que $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i}$. La dmonstration se calque sur celle tablie au paragraphe précédent. Notons D_{λ_i} le sous-espace $\ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i}$.

Posons $\widetilde{P}_i(X) = (X-\lambda_i)^{s_i}$ et $\widetilde{Q}_i(X) = (X-\lambda_1)^{s_1}\cdots(X-\lambda_{i-1})^{s_{i-1}}(X-\lambda_{i+1})^{s_{i+1}}\cdots(X-\lambda_p)^{s_p}$. Ainsi

$$\mathfrak{m}_f(X) = \widetilde{P}_i(X)\widetilde{Q}_i(X).$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ quand $i \neq j$, les polynômes $\widetilde{Q}_i(X)$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout il existe des polynômes $\widetilde{h}_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\widetilde{h}_1(X)\widetilde{Q}_1(X) + \cdots + \widetilde{h}_p(X)\widetilde{Q}_p(X) = 1.$$

Considérons alors les endomorphismes suivants:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_i = \widetilde{P}_i(f), \\ \widetilde{g}_i = \widetilde{Q}_i(f) \\ \widetilde{l}_i = \widetilde{h}_i(f) \end{cases}$$

Comme

$$\widetilde{h}_1(X)\widetilde{Q}_1(X) + \cdots + \widetilde{h}_p(X)\widetilde{Q}_p(X) = 1$$

on a

$$\widetilde{h}_1(f)\circ\widetilde{Q}_1(f) + \cdots + \widetilde{h}_p(f)\circ\widetilde{Q}_p(f) = I_n$$

c'est-á-dire

$$\widetilde{l}_1\circ\widetilde{g}_1 + \cdots + \widetilde{l}_p\circ\widetilde{g}_p = I_n.$$

Ainsi pour tout veceur $v \in E$ on a

$$(\widetilde{l}_1\circ\widetilde{g}_1 + \cdots + \widetilde{l}_p\circ\widetilde{g}_p)(v) = v.$$

Posons

$$\Pi_i = \widetilde{l}_i\circ\widetilde{g}_i.$$

L'identité précédente s'écrit alors

$$\Pi_1 + \cdots + \Pi_p = I_n.$$

Lemme 1. *Les endomorphismes Π_j vérifient*

$$(1) \qquad \begin{cases} \Pi_1 + \cdots + \Pi_p = I_n, \\ \Pi_j\circ\Pi_k = 0 \text{ si } i \neq j \\ \Pi_j\circ\Pi - j = \Pi - j, : j = 1,\cdots,p. \end{cases}$$

Démonstration. On a déjà montré la première identité. Montrons la deuxième. Soient j et k deux indices distincts. On a

$$\begin{cases} \Pi_j\circ\Pi_k & = \widetilde{j}_i\circ\widetilde{g}_j\circ\widetilde{l}_k\circ\widetilde{g}_k \\ & = \widetilde{g}_j\circ\widetilde{g}_k\circ\widetilde{j}_i\circ\widetilde{l}_k \end{cases}$$

En effet nous avons vu que tous les endomorphismes dfinis à partir de polynômes, commutent. Mais on vérifie facilement que $\widetilde{g}_j\circ\widetilde{g}_k$ s'écrit $\mathfrak{m}_f(f)T(f)$ où $T(f)$ est un polynôme en f. Ainsi, comme $\mathfrak{m}_f(f) = 0$, on a

$$\Pi_j\circ\Pi_k = 0.$$

Montrons la troisième identité. On a

$$\Pi_j = \Pi_j\circ I_n = \Pi_j\circ(\Pi_1 + \cdots + \Pi_p) = \Pi_j\circ\Pi_1 + \cdots + \Pi_j\circ\Pi_p) = \Pi_j\circ\Pi_j.$$

D'où le lemme.

Lemme 2.

$$\mathrm{Im}\Pi_\mathrm{i} = \ker(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{I}_\mathrm{n})^{\mathrm{s}_\mathrm{i}} \tag{2}$$

Démonstration. Les endomorphismes $\widetilde{f_i}$ et $\widetilde{g_i}$ vérifient

$$\widetilde{f_i} \circ \widetilde{g_i} = \widetilde{g_i} \circ \widetilde{f_i} = \mathfrak{m}_f(f) = 0$$

On en déduit

$$\widetilde{f_i} \circ \Pi_i = \Pi_i \circ \widetilde{f_i} = \widetilde{l_i} \circ \widetilde{g_i} \circ \widetilde{f_i} = 0.$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}\Pi_\mathrm{i} \subset \ker \widetilde{\mathrm{f_i}} = \ker(\mathrm{f} - \lambda_\mathrm{i}\mathrm{I}_\mathrm{n})^{\mathrm{s}_\mathrm{i}}.$$

Inversement, soit $v \in ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i}$.. Si k est un indice différent de i, alors

$$\widetilde{g_k}(v) = 0,\ \forall k \neq i$$

car $\widetilde{g_k} = \widetilde{Q_k}(f)$ et ce dernier polynôme contient le facteur $\widetilde{f_i}$ et que tous les facteurs de $\widetilde{Q}(f)$ commutent. Mais nous avons vu que

$$\begin{cases} v & = (\widetilde{l_1} \circ \widetilde{g_1} + \cdots + \widetilde{l_p} \circ \widetilde{g_p})(v) \\ & = (\widetilde{l_i} \circ \widetilde{g_i}(v) \\ & = \Pi_i(v). \end{cases}$$

Ainsi $v \in \mathrm{Im}\Pi_\mathrm{i}$.

On déduit directement de ces deux lemmes que

$$E = \ker(f - \lambda_1 I_n)^{s_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_p I_n)^{s_p}.$$

Comme chacun des sous-espaces $\ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i}$ est un sous-espaces de $\mathcal{C}_{\lambda_i}(f)$, on en déduit que la décomposition précédente correspond à la décomposition spectrale, soit

$$\ker(f - \lambda_i I_n)^{s_i} = \mathcal{C}_{\lambda_i}(f).$$

D'où le théorème.

3.2. Critère de diagonalisation et polynôme minimal.

Théorème 5. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes ou confondues. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes. Alors f est diagonalisable si et seulement si les racines du polynôme minimal de f sont simples, c'est-à-dire si et seulement si*

$$\mathfrak{m}_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p).$$

Démonstration. Supposons que les racines du polynôme minimal soient simples. D'après le Théorème 5, les sous-espaces caractéristiques vérifient

$$\mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i I_n).$$

Ils sont donc égaux aux espaces propres E_{λ_i}. Comme $\dim \mathcal{C}_{\lambda_i}(f) = r_i$ la multiplicité de la valeur propre λ_i, on a

$$\dim E_{\lambda_i} = r_i$$

et f est diagonalisable. Inversement, supposons que f soit diagonalisable. Il existe une bese de E, $\{v_1, \cdots, v_p\}$ constituée de vecteurs propres de f. Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$$

Alors pour tout vecteur propre v_i de la base choisie, on a

$$P(f)(v_i) = (f - \lambda_1 I_n) \cdots (f - \lambda_p I_n)(v).$$

Mais les facteurs commutent et comme v_i est un vecteur propre, il est associé à une valeur propre λ_l et donc $(f - \lambda_l I_n)(v_i) = 0$. D'où $P(f)(v_i) = 0$ pour tout vecteur v_i de la base choisie. Ainsi l'endomorphisme $P(f)$ est nul et $P(X)$ est un polynôme annulateur de f. C'est le polynôme minimal et toutes ses racines sont simples.

4. La décomposition $M = D + N$

4.1. **Matrices nilpotentes.**

Définition 2. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que*

$$M^k = 0.$$

Soit λ une valeur propre de la matrice nilpotente M. On sait alors que λ^p est une valeur prore de M^p. Il s'en suit que λ^k est une valeur propre de M^k. Or par hypothèse $M^k = 0$. On en déduit que $\lambda^k = 0$ et donc $\lambda = 0$. De plus, il est clair que le polynôme $P(X) = X^k$ est un polynôme annulateur de M. Comme tout polynôme qui divise $P(X) = X^k$ est du type X^p avec $p \leq k$, le polynôme minimal de M est donc du type X^p. Soit n_M le plus petit entier k tel que $M^k = 0$. Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de la matrice nilpotente M. Le polynôme minimal de M est donc

$$\mathfrak{m}_M(X) = X^{n_M}.$$

En particulier, ce polynôme n'a que des racines simples seulement si $n_M = 1$. Dans ce cas $\mathfrak{m}_M(X) = X$ et donc $\mathfrak{m}_M(M) = M = 0$. En résumé:

Proposition 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Alors les valeurs propres de M sont toutes nulles. Si n_M est son indice de nilpotence, alors le polynôme minimal de f est $\mathfrak{m}_M(X) = X^{n_M}$. En particulier une matrice nilpotente est diagonalisable si et seulement si elle est nulle.*

Il est également clair que si M est nilpotente, toute matrice sembleble $M4 = P^{-1}MP$ est aussi nilpotente et de même indice de nilpotence.

Définition 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier k tel que*

$$f \circ f \cdots \circ f = f^k = 0.$$

Si M est la matrice de f relative à une base de E donnée, alors M est une matrice nilpotente.

4.2. **La décomposition $M = D + N$, cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.**

Théorème 6. *Soit $M \in \mathfrak{m}_n(\mathbb{C})$ une matrice complexe. Il existe un unique couple de matrices (D, N) de $\mathfrak{m}_n(C)$ tel que*

(1) *D est une matrice diagonalisable,*
(2) *N est une matrice nilpotente*
(3) *$M = D + N$*
(4) *$DN = ND$.*

Au lieu de démontrer ce résultat, on propose une méthode pratique de détermination directe des matrices A et N. Cette méthode est basée sur la détermination des projecteurs Π_k définis dans la relation (1).

Méthode de calcul des matrices A et N.

(1) On détermine le polynôme minimal $\mathfrak{m}_M(X)$ de la matrice M et on le factorise:

$$\mathfrak{m}_M(X) = (X - \lambda_1)^{s_1}(X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_p)^{s_p}.$$

(2) On décompose en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathfrak{m}_M(X)}$:

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_M(X)} = \frac{R_1(X)}{(X - \lambda_1)^{s_1}} + \frac{R_2(X)}{(X - \lambda_2)^{s_2}} + \cdots + \frac{R_p(X)}{(X - \lambda_p)^{s_p}} \tag{3}$$

où $R_i(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $s_i - 1$, pour $i = 1, \cdots, p$.

(3) Posons

$$\widetilde{Q}_i(X) = (X - \lambda_1)^{s_1} \cdots (X - \lambda_{i-1})^{s_{i-1}}(X - \lambda_{i+1})^{s_{i+1}} \cdots (X - \lambda_p)^{s_p}$$

Alors $\mathfrak{m}_M(X) = \widetilde{Q}_i(X)(X - \lambda_i)^{s_i}$ pour tout $i = 1, \cdots, p$.

(4) Multiplions les deux membres de l'équation (3) par $\mathfrak{m}_M(X)$:

$$1 = \frac{R_1(X)\mathfrak{m}_M(X)}{(X - \lambda_1)^{s_1}} + \frac{R_2(X)\mathfrak{m}_M(X)}{(X - \lambda_2)^{s_2}} + \cdots + \frac{R_p(X)\mathfrak{m}_M(X)}{(X - \lambda_p)^{s_p}} \tag{4}$$

et simplifions

$$1 = R_1(X)\widetilde{Q}_1(X) + R_2(X)\widetilde{Q}_2(X) + \cdots + R_p(X)\widetilde{Q}_p(X). \tag{5}$$

(5) Posons
$$N_i(X) = R_i(X)\widetilde{Q}_i(X)$$
pour $i = 1, \cdots, p$ et considérons les matrices
$$\Pi_i = N_i(M).$$
(6) La matrice A est la matrice
$$A = \lambda_1\Pi_1(M) + \lambda_2\Pi_2(M) + \cdots + \lambda_p\Pi_p(M).$$
(7) La matice N est la matrice
$$N = M - A.$$

Exemple. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$
Son polynôme caractéristique est
$$C_f(X) = C_M(X) = -(X+1)^2(X-3).$$
Au paragraphe **1.2** nous avons vu que cette matrice n'était pas diagonalisable. On a donc
$$\mathfrak{m}_M(X) = (X+1)^2(X-3).$$
Posons
$$\frac{1}{\mathfrak{m}_M(X)} = \frac{1}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{R_1(X)}{(X+1)^2} + \frac{R_2(X)}{(X-3)}$$
les polynômes $R_1(X)$ étant de degré inférieur ou égal à 1 et $R_2(X)$ de degré 0, c'est donc une constante. On détermine directement $R_2(X)$ en multipliant toute l'identité par $X-3$ puis en faisant $X = 3$. On en déduit
$$R_2(X) = \frac{1}{16}.$$
Posons $R_1(X) = aX + b$. On détermine les constantes a et b (comme on veut): par exemple, on multiplie l'identité par X et on fait tendre X vers l'infini, ceci donne
$$0 = a + \frac{1}{16}$$
soit
$$a = -\frac{1}{16}$$
et si $X = 0$:
$$\frac{-1}{3} = b - \frac{1}{48}$$
soit
$$b = -\frac{15}{48}$$
ce qui donne
$$\frac{1}{\mathfrak{m}_M(X)} = \frac{1}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{-\frac{1}{16}X - \frac{15}{48}}{(X+1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-3)}.$$
Multiplions les deux membres par $(X+1)^2(X-3)$. Il vient
$$1 = (-\frac{1}{16}X - \frac{15}{48})(X-3) + \frac{1}{16}(X+1)^2.$$

Ainsi

$$\begin{cases} N_1(X) = (-\frac{1}{16}X - \frac{15}{48})(X-3) = -\frac{1}{16}X^2 - \frac{1}{8}X + \frac{15}{16} \\ N_2(X) = \frac{1}{16}(X+1)^2 = \frac{1}{16}X^2 + \frac{1}{8}X + \frac{1}{16}. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \Pi_1 = N_1(M) = -\frac{1}{16}M^2 - \frac{1}{8}M + \frac{15}{16}I_3 \\ \Pi_2 = N_2(M) = \frac{1}{16}(M+I_3)^2. \end{cases}$$

et

$$D = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 = -\Pi_1 + 3\Pi_2.$$

On obtient

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Exponentielle d'une matrice complexe

5.1. **Rappel.**

Définition 4. *Soit $M \in m_n(\mathbb{K})$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors*

$$Exp\ M = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \cdots + \frac{1}{n!}M^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}M^n.$$

Nous avons vu que cette série convergeait pour toute matrice M. Donc l'exponentielle d'une matrice carrée existe toujours. De plus c'est une matrice inversible qui vérifie

$$(Exp\ M)^{-1} = Exp(-M).$$

Nous avons vu également que si M et M' commutent, alors

$$Exp(M + M') = Exp(M) \cdot Exp(M').$$

5.2. **Exponentielle d'une matrice nilpotente.**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Soit p son indice de nilpotence:
$$M^p = 0.$$
Dans ce cas, l'exponentielle de la matrice M se calcule à partir de la définition, le développement en série se réduisant ici à un simple développement polynomial:
$$Exp\ M = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \cdots + \frac{1}{p!}M^p.$$
Exemple. Soit la matrice
$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Elle vérifie
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc N est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence égal à 2. On en déduit
$$Exp\ N = I_3 + N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.3. **Exponentielle d'une matrice $M = D + N$.**

Soit $M\ in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = D + N$ sa décomposition. Comme D est diagonalisable, nous savons calculer son exponentielle: Soit $D' = P^{-1}DP$ une matrice diagonale sembleble à D. Alors
$$ExpD = P \cdot ExpD' \cdot P^{-1}.$$
Comme N est nilpotente, nous venons de voir comment calculer son exponentielle. Comme les matrices D et N commutent, on en déduit
$$ExpM = ExpD \cdot ExpN.$$

EXERCICES

Exercice 1