
Séries numériques

Dans tout ce chapitre, lorsque nous parlerons de suites ou séries numériques, il s'agira nécessairement de suites ou séries à termes réels. Lorsque nous parlerons de suites ou séries à termes complexes, nous le spécifierons en parlant de suites ou séries complexes.

1. RAPPELS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1.1. **Définitions.** Rappelons brièvement quelques définitions de base. Des compléments sont détaillés en Annexe 1.

Définition 1. On appelle suite numérique toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On identifie souvent l'application u à son image et l'on écrit la suite u d'une manière plus suggestive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que $u_n = u(n)$. Le nombre u_n est appelé le terme de rang n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une suite peut aussi être considérée comme une liste ordonnée de nombres réels. Elle peut être aussi définie sur une partie de \mathbb{N} de la forme $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ où n_0 est un entier donné.

On peut également parler de suite complexe. Dans ce cas l'application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ est à valeurs dans le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Si on pose $u_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle et b_n la partie imaginaire du nombre complexe u_n , l'étude de la suite complexe (u_n) se ramène alors à celle des deux suites réelles (a_n) et (b_n) .

Exemples

(1) La suite nulle est la suite dont tous les termes sont nuls :

$$u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (2) Les suites constantes. Si $k \in \mathbb{R}$, on considère la suite dont tous les termes sont égaux à k :

$$u_n = k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (3) Si $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de cette suite est l'ensemble \mathbb{N} .

- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{1}{n+1}$; alors $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des inverses des nombres entiers. Celle-ci peut être représentée par :

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right).$$

Définition 2. Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{N} ou sur une même partie $I_{n_0} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ de \mathbb{N} sont égales si pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou pour tout $n \in I_{n_0}$ on a $u_n = v_n$.

1.2. Convergence et divergence des suites numériques.

Définition 3. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe. Dans ce cas le nombre l donné par

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

est un nombre réel appelée la limite de la suite. Toute suite qui ne converge pas est dite divergente.

Il y a deux manières pour une suite de diverger :

- soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$
- soit la limite de u_n quand n tend vers l'infini n'existe pas.

Par contre, dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et que cette limite vaut l signifie que pour tout nombre ε positif (supposé intuitivement petit), alors à partir d'un certain rang N on a

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0$$

Exemples. Si on prend la suite de terme général $u_n = n$ elle diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Si on prend la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ elle est divergente car u_n n'a pas de limite quand n tend vers l'infini.

Théorème 1. La limite d'une suite convergente est unique.

Définition 4. *Une suite complexe (u_n) est convergente si et seulement si les deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont convergentes, où a_n est la partie réelle de u_n et b_n sa partie imaginaire.*

1.3. Quelques critères de convergence.

Définition 5. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que cette suite est croissante si pour tout n entier naturel, on a :*

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Elle est dite décroissante si pour tout n entier naturel, on a :

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

On dit qu'une suite numérique est monotone, si elle est croissante ou décroissante, sans préciser son sens de variation. Bien entendu, ces notions de variations n'ont pas de sens dans le cas des suites complexes. Mais on étudie alors séparément les suites réelles (a_n) et (b_n) avec $u_n = a_n + ib_n$.

Théorème 2. *1. Toute suite numérique croissante majorée est convergente.*

2. Toute suite numérique décroissante minorée est convergente.

3. Toute suite numérique croissante non majorée est divergente vers $+\infty$.

4. Toute suite numérique décroissante non minorée est divergente vers $-\infty$.

Exemple. Considérons la suite définies par la relation

$$u_{n+1} = u_n^2, \quad \forall n, n \geq 0,$$

et

$$u_0 = \frac{1}{2}.$$

Tous les termes de la suite sont positifs. Donc la suite est minorée par 0. Tous les termes sont également majorés par 1. En effet on a $u_0 = \frac{1}{2}$. Donc $u_1 = \frac{1}{4}$. Plus généralement, si $u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} = u_n^2 \leq 1$. Donc la suite est bornée. On a également

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \leq 1.$$

La suite est décroissante, minorée. Elle est convergente.

Théorème 3. Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Exemple. Considérons la suite définie par

$$v_n = \frac{\cos^2 n}{3^n}.$$

Comme $0 \leq \cos^2 n \leq 1$, alors $u_n = 0 \leq u_n \leq v_n = w_n = \frac{1}{3^n}$. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n,$$

alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

2. SUITES GÉOMÉTRIQUES

2.1. Définition.

Définition 6. Soit $r \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné.

On appelle suite géométrique de raison r la suite donnée par

$$u_n = \alpha r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Exemples. La suite géométrique est l'outil privilégié pour l'étude de phénomène à croissance ou décroissance exponentielle et l'étude de populations dont la taille double ou diminue de moitié dans un intervalle de temps constant (période). Par exemple, le carbone ^{14}C est un atome radioactif dont la période ou demi-vie est de $T = 5730$ ans (à 40 an près). Cela signifie que, en cas de fermeture d'un système (fin des échanges avec le monde extérieur), la quantité de carbone 14 diminue de moitié tous les 5730 ans. Si N est la quantité de ^{14}C dans le système, au bout de T années ($T = 5730$ ans), il n'existe plus que $N/2$ atomes de ^{14}C . Au bout de $2T$, il n'y a plus que $N/4$ atomes. Au bout de $3T$, il ne reste plus que $N/8$ atomes. Si on appelle N_n la quantité d'atomes ^{14}C au bout de n périodes, la suite (N_n) est une suite géométrique de raison $1/2$.

2.3. Variations d'une suite géométrique. On supposera que le premier terme de la suite est u_0 et que u_0 et r sont non nuls.

* si $r < 0$, la suite n'est pas monotone et oscille alternativement dans les nombres négatifs et positifs.

* si $r \in]0; 1[$, alors si $u_0 > 0$ la suite est décroissante positive et si $u_0 < 0$, la suite est croissante négative.

* si $r \in]1; +\infty[$, si $u_0 > 0$ la suite est croissante positive et si $u_0 < 0$, la suite est décroissante négative.

* si $r = 1$, la suite est constante.

2.4. Somme des termes d'une suite géométrique. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r . On a donc $u_n = u_0 r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Appelons S_n la somme des n premiers termes de cette suite :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Alors on a

$$S_n = u_0 + u_0 r + \cdots + u_0 r^n$$

soit, en mettant u_0 en facteur

$$S_n = u_0(1 + r + r^2 + \cdots + r^n).$$

Mais

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

à condition que $r \neq 1$. En effet ceci provient de l'identité remarquable

$$1 - r^{n+1} = (1 - r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n).$$

Si $r = 1$, alors

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

On en déduit donc

$$S_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{si } r \neq 1$$

et

$$S_n = (n + 1)u_0 \quad \text{si } r = 1.$$

3. GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

3.1. Généralités sur les séries numériques.

Définition 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Posons $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Les S_n forment une nouvelle suite et au lieu de parler de suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on parle de "série de terme général u_n " notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Le nombre S_n s'appelle la somme partielle de la série de terme général u_n . Prenons par exemple la suite géométrique de raison $r \neq 1$ dont le premier terme est u_0 . Nous avons calculé au chapitre précédent la somme partielle et trouvé

$$S_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Ainsi, l'étude de la série de terme général $u_n = u_0 r^n$, c'est-à-dire l'étude de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_0 r^n$$

correspond à l'étude de la suite de terme général $S_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

3.2. Convergence-Divergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Définition 8. La série de terme général u_n est dite convergente si la suite de terme général S_n admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. (i.e. si S_n admet une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$). Si une telle limite existe, on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et S est appelé somme de la série.

La série de terme général u_n est dite divergente si la suite de terme général S_n est divergente.

Ainsi la limite d'une série numérique, si elle existe, est unique.

Exemple. On considère un gâteau carré de côté 1 que l'on divise en deux. On en mange la moitié puis on redise en deux la partie restante. On en mange la moitié, ainsi de suite. Notons u_1 la fraction de gâteau mangée la première fois. On a donc

$$u_1 = \frac{1}{2}.$$

Si u_2 est la fraction de gâteau mangée la deuxième fois, on a

$$u_2 = \frac{1}{4}$$

et la fraction totale mangée alors est

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

De façon générale, si u_n est la fraction de gâteau mangée la n -ième fois, alors

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

et la part totale mangée est

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Il est clair que la limite de cette série est 1 (tout le gâteau), et on écrit :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

3.3. Sur la convergence de la série géométrique. On appelle série géométrique, la série de terme général $u_n = u_0 r^n$. La suite (u_n) est la suite géométrique de raison r . Nous avons vu au début de cette section que, si $r \neq 1$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Nous savons que r^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini si $|r| < 1$. Si $|r| > 1$ la limite est infinie. De plus, si $r = 1$, $S_n = u_0(n+1)$ et la suite (S_n) diverge (vers $\pm\infty$) si $u_0 \neq 0$; si $r = -1$ on a $S_{2n} = u_0$ et $S_{2n+1} = 0$ et la suite (S_n) diverge (pas de limite) si $u_0 \neq 0$. On a donc :

Proposition 1. *Si la raison r d'une série géométrique $\sum_{n \geq 0} u_0 r^n$ ($u_0 \neq 0$) vérifie $|r| < 1$ alors la série converge et on a*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_0 r^n = \frac{u_0}{1 - r}.$$

Si la raison vérifie $|r| \geq 1$, la série diverge.

3.4. Une condition nécessaire de convergence. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors la suite S_n admet une limite S . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0.$$

Proposition 2. *Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0 :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. CRITÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Le premier critère que nous venons de voir, et qui est valable pour des séries à termes quelconques (pas nécessairement positifs) est le suivant

Proposition 3. *Soit la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Si le terme général ne tend pas vers 0, alors elle diverge.*

Dans tout ce paragraphe on suppose que les séries $\sum_{n \geq 0}$ sont à termes positifs, c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout n .

4.1. Le critère de comparaison.

Théorème 4. *Soit deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs telles que*

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

pour tout n (ou à partir d'un certain rang)

- *Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.*

4.2. Le critère de d'Alembert.

Théorème 5. *Soit une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes positifs.*

- *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la série converge.*
- *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la série diverge.*
- *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors on ne peut pas conclure.*

Dire que l'on ne peut conclure lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ signifie qu'il existe des exemples de séries divergentes vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et des exemples de séries convergentes vérifiant la même propriété.

Exemples

1. Soit la série de terme général $u_n = \frac{n^5}{2^n}$. Cette série est bien à termes positifs et on peut vérifier que le terme général tend vers 0. Pour appliquer le critère de d'Alembert calculons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^5 2^n}{2^{n+1} n^5} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1$$

on en déduit que la série est convergente (mais on ne sait pas calculer la somme de cette série).

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est appelée série harmonique. Ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure. On peut montrer par ailleurs que cette série est divergente.

4.3. Le critère de Cauchy.

Théorème 6. Soit une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes positifs.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ alors la série converge.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ alors la série diverge.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ alors on ne peut pas conclure.

Exemple

Soit la série de terme général $u_n = \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n$. Calculons

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n} = \frac{2n+1}{5n+2}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right) = \frac{2}{5} < 1.$$

Cette série converge d'après le critère de Cauchy.

4.4. Critère de comparaison à une intégrale. La série de Riemann.

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On définit

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

On note

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t).$$

Cette intégrale n'est pas une intégrale de Riemann, c'est une intégrale généralisée (en $+\infty$). Si F a une limite quand t tend vers $+\infty$ on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est convergente, sinon on dit qu'elle diverge.

Théorème 7. *Comparaison à une intégrale. Si f est une fonction positive continue et décroissante pour $x \geq a$, la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Ainsi*

- $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} f(n)$ est convergente $\iff \int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
- $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} f(n)$ est divergente $\iff \int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.

Idée de la démonstration. Supposons $a = 1$. On a pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$, ainsi en sommant on obtient $S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$. Si l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ qui est croissante est non majorée (d'après la partie droite de l'inégalité) donc diverge vers $+\infty$; ainsi la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge. Si c'est la série qui diverge, i.e la suite (S_n) diverge alors la partie gauche de l'inégalité implique que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge elle aussi. On peut obtenir de manière analogue l'autre équivalence.

Séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série à termes positifs du type

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

où α est un réel positif.

Proposition 4. *Si $\alpha > 1$ la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. Si $\alpha \leq 1$ la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.*

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$ la série diverge (grossièrement) puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha > 0$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ puisque $f'(x) = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. On peut donc utiliser le critère de comparaison avec une intégrale et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sera de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

- Si $\alpha = 1$ alors $\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^t = \ln t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$. Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$ alors $\int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_1^t = \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent si $\alpha > 1$ et divergent si $0 < \alpha < 1$.

4.5. Critère de convergence par équivalence.

Définition 9. On dira que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont équivalentes à l'infini si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On écrira dans ce cas $u_n \sim_{\infty} v_n$.

Théorème 8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs. Si

$$u_n \sim_{\infty} v_n$$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $u_n \sim_{\infty} v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc à partir d'un certain rang

$$1 - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1 + \varepsilon$$

soit $v_n(1 - \varepsilon) < u_n < v_n(1 + \varepsilon)$. Le critère de comparaison permet de conclure.

4.6. Critère de convergence via la série de Riemann.

Soit u_n le terme général d'une série numérique, $u_n \geq 0$. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} u_n = l$$

avec $l \neq 0$. On dit dans ce cas que u_n est équivalent à $1/n^{\alpha}$ et on écrit

$$u_n \simeq \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Alors si $\alpha > 1$ la série de terme général u_n converge. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.

Exemple. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{n+1}{n^3+2}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, la fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré. Donc ici

$$u_n \simeq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi la série de terme général u_n est équivalente à la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. Cette dernière est convergente, donc le série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$$

est convergente.

Remarque. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} u_n = 0$$

alors à partir d'un certain rang $n^\alpha u_n < 1$ et donc $u_n < \frac{1}{n^\alpha}$. Si de plus $\alpha > 1$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et, d'après le critère de comparaison, $\sum u_n$ aussi. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$$

alors à partir d'un certain rang $n^\alpha u_n > 1$ et donc $u_n > \frac{1}{n^\alpha}$. Si de plus $\alpha \leq 1$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et, d'après le critère de comparaison, $\sum u_n$ aussi.

4.7. Un exemple : les séries de Bertrand. On appelle série de Bertrand une série de la forme

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Théorème 9. La série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

- converge si $\alpha > 1, \forall \beta$,
- diverge si $\alpha < 1, \forall \beta$,
- converge si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$,
- diverge si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

5. ETUDE DES SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

On va regarder dans ce paragraphe comment étudier des séries dont les termes ne sont pas tous de même signe.

5.1. Séries absolument convergentes. Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'ait pas ses termes de même signe. On peut alors s'intéresser à la série dont le terme général est $|u_n|$, la valeur absolue de u_n . Cette série est donc à termes positifs et les critères de convergence des séries à termes positifs peut lui être appliquée.

Définition 10. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

L'intérêt de la convergence absolue est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 10. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{n^2}.$$

Le signe de u_n est celui de $\cos n$, donc cette série n'est pas à termes positifs. Considérons la série des valeurs absolues

$$|u_n| = \frac{|\cos n|}{n^2}.$$

C'est une série à termes positifs. Comme $|n| \leq 1$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $1/n^2$ est, d'après le paragraphe 2.3 cette série est convergente. Donc la série $\sum_{n>0} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque. La réciproque du théorème précédent est fautive. Considérons par exemple la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant le critère des séries alternées et pourrons prouver que cette série converge. Par contre la série des valeurs absolues

$$u_n = \frac{1}{n}$$

est une série de Riemann qui diverge.

Définition 11. Une série numérique convergente mais non absolument convergente sera dite simplement convergente.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est simplement convergente.

5.2. Séries alternées.

Définition 12. On appelle série alternée une série dont le terme général u_n est alternativement positif puis négatif, c'est-à-dire qu'il s'écrit

$$u_n = (-1)^n a_n \text{ ou bien } u_n = (-1)^{n+1} a_n$$

avec $a_n \geq 0$ pour tout n . Ainsi $\sum |u_n| = \sum a_n$.

Théorème 11. Soit une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$. Alors si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

Ce critère est très pratique car il ramène l'étude de la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ à l'étude de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$.

Démonstration. Considérons les deux sous-suites de la suite (S_n) formées pour la première des termes d'indice pair et pour la seconde des termes d'indice impair. Posons donc $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$. On a

$$A_n = S_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}.$$

Par hypothèse, la suite (a_n) est décroissance et à termes positifs. On en déduit que la suite (A_n) est à termes positifs. Comme

$$A_n - A_{n-1} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0$$

la suite (A_n) est décroissance minorée par 0. Elle converge. De même, on a

$$B_n = S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1}$$

et donc

$$B_n \leq a_0.$$

De plus

$$B_n - B_{n-1} = S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n-1}.$$

Comme la suite (a_n) est positive et décroissance, la suite (B_n) est croissante et majorée par a_0 . Elle est donc aussi convergente. Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n,$$

on en déduit que la suite (S_n) converge, d'où le résultat.

Exemple. Considérons la série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

C'est une série alternée. Ici $a_n = \frac{1}{n}$. Cette suite est décroissance et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, cette série converge.

5.3. Le critère d'Abel. Ce critère généralise celui des séries alternées. Il est intéressant dans des séries faisant apparaître des termes périodiques bornés comme des fonctions sinus ou cosinus.

Théorème 12. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est telle que

$$u_n = a_n \cdot b_n$$

avec

(1) la suite (a_n) est décroissante vers 0,

(2) Il existe une constante M telle que pour tout n on ait

$$\left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M,$$

alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Exemple. Considérons la série de Fresnel

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n}.$$

Nous avons $|u_n| \leq \frac{1}{n}$. On majore donc par une série divergente, le critère d'absolue convergence ne donne rien. Utilisons le critère d'Abel. On pose $a_n = 1/n$ et $b_n = \cos n$. On démontrera en exercice l'inégalité

$$|1 + \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})}.$$

Ainsi le critère d'Abel s'applique et la série est convergente.

6. SÉRIES COMPLEXES

Les définitions de base sont analogues à celles du cas réel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Posons $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série complexe de terme général u_n et notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Le nombre S_n s'appelle la somme partielle de la série de terme général u_n . La série complexe de terme général u_n est dite convergente si la suite complexe de terme général S_n admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Si une telle limite existe, on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et S est appelé somme de la série. La série complexe de terme général u_n est dite divergente si la suite complexe de terme général S_n est divergente.

Posons $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$S_n = U_n + iV_n$$

avec $U_n = a_0 + \dots + a_n$, et $V_n = b_0 + \dots + b_n$ et S_n converge si et seulement si chacune des suites réelles U_n et V_n converge. La série complexe $\sum u_n$ converge donc si et seulement si chacune des séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge.

Définition 13. La série complexe $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série à termes positifs

$$\sum |u_n| = \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

converge.

Comme dans le cas réel, nous avons le résultat suivant :

Théorème 13. Si la série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle converge.

Notons, que dans ce cas aussi, la réciproque est fausse.