CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 5

Variables aléatoires. Variables aléatoires finies

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. En général l'ensemble Ω est un ensemble relativement compliqué sur lequel il est difficile de faire des opérations mathématiques. Imaginons par exemple, une étude sur la population des anchois en Méditérannée. Cette population est difficilement discernable D'où l'idée naturelle de remplacer cet ensemble Ω par un ensemble mathématiques plus accessible aux opérations, $\mathbb{R}$, par exemple, en privilégiant un caractère particulier de Ω. Dans tout ce chapitre, on s'intéressera essentiellement au cas où l'ensemble Ω est fini. Dans ce cas, on prendra comme tribu $F = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Définition et Exemples

1.1. **Définition d'une variale aléatoire finie.** Dans le cas où $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ est un espace probabilisé fini, la notion de variable aléatoire (parfois appelée aussi caractère) est très simple.

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé fini. On appelle variable aléatoire sur cet espace toute fonction*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Une variable aléatoire prend, dans ce cas fini, qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \cdots, x_s$ que nous convenons de classer dans le sens croissant :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_s.$$

L'ensemble fini $\Omega_X = \{x_1, \cdots, x_s\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appelé l'ensemble fondamental de la variable aléatoire X. Nous voyons déjà l'intérêt de cette notion de variable aléatoire, nous transposons l'étude des probabilités dans des sous-ensembles (ici finis) de $\mathbb{R}$, alors que l'ensemble de base Ω était plus ou moins bien défini mathématiquement.

Pour chacune de ces valeurs x_i, nous pouvons considérer le sous-ensemble

$$X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_i\}.$$

Attention à la notation X^{-1} qui ne signifie pas prendre l'inverse ou la fonction réciproque de X qui n'existe pas en général. Mais cet ensemble $X^{-1}(x_i)$ est l'ensemble de tous les évènements élémentaires ω qui ont pour image le réel fixé x_i, et par définition de x_i, cet ensemble est non vide.

On s'intéressera également au sous-ensemble de Ω défini par

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leq x\}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $x < x_1$, il est clair que cet ensemble est vide. Si $x_i \leq x < x_{i+1}$, alors

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(x_1) \cup \cdots \cup X^{-1}(x_i).$$

De même, on définit pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, le sous-enesemble de Ω :

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega, \quad a \leq X(\omega) \leq b\}.$$

1.2. **Exemples.**

(1) Soit $/omega$ l'ensemble des épreuves consistant à peser tous les habitants de Mulhouse. La fonction : " à un individu on fait correspondre sa taille" est une variable aléatoire.

(2) La fonction qui à un dé fait correspondre sa marque est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a

$$\Omega = \Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(3) Considérons toujours le lancer d'un dé cubique. LMa fonction Y qui aux marques paires fait correspondre 1 et aux impiares 0 est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et

$$\Omega_Y = \{0, 1\}.$$

Notons que

$$Y^{-1}(0) = \{1, 3, 5\}$$

et

$$Y^{-1}(1) = \{2, 4, 6\}.$$

(4) Soit Ω l'ensemble des élèves de la classe, $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui à un élève fait correspondre son âge est une variable aléatoire et

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$

correspondra à l'ensemble des élèves qui ont moins (éventuellement égal) de $[x]$ ans, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x.

(5) Considérons le lancer d'un dé et notons par f_i la face du dé correspondant au chiffre i. Alors $\Omega = \{f_1, \cdots, f_6\}$ et X donnée par $X(f_i) = i$ est une variable aléatoire.

(6) On note par h et t les côtés pile et face d'une pièce de monnaie. L'expérience assoiée au lancer de cette pièce correspond à $\Omega = \{h, t\}$. L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par

$$X(h) = 1, \; X(t) = 0$$

est une variable aléatoire sur Ω. Si nous considérons maintenant l'expérience associée à n lancers successifs, alors $\Omega_1 = \Omega^n$. Un évènements élémentaire est un mot du type $\omega = hhtth...t$ de longueur n écrit avec les seules lettres h et t. L'application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$X(\omega) = \text{nombre de lettres } h \text{ dans le mot } \omega$$

est une variable aléatoire. Elle décrit le nombre de fois où pile est obtenu au cours de n lancers successifs.

1.3. **Somme, produit de variables aléatoires.** Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ on peut définir la somme et le produit de ces deux applications :

$$X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

telle que

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Par exemple, si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, Y_l\}$, alors

$$(X + Y)(\Omega) = \{x_i + y_j,\ i = 1, \cdots, p,\ j = 1, \cdots, l\}.$$

On définit de même le produit

$$XY : \Omega \to \mathbb{R}$$

par

$$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Par exemple, si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, Y_l\}$, alors

$$(XY)(\Omega) = \{x_i y_j,\ i = 1, \cdots, p,\ j = 1, \cdots, l\}.$$

1.4. **Image d'une variable aléatoire.** Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et soit

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

une fonction (continue, dérivable, indéfiniment de fois dérivable) d'une variable réelle.

Définition 2. *On appelle variable aléatoire image de X par φ, l'application*

$$Y = \varphi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(X)(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

2.1. Définition.

Définition 3. *Soit* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *un espace probabilisé et soit* X *une variable aléatoire sur cet espace. La loi de probabilité de* X *est la probabilité sur* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$P_X(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}).$$

En particulier on a :

$$P_X(]a, b]) = P(\{\omega \in \Omega,\ a < X(\omega) \leq b\}$$

ou bien

$$P_X(\{x\}) = P(\{\omega\ X(\omega) = x\}.$$

Remarquons que P_X est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ (ou plus précisément sur un sous-ensemble fini Ω_X de $\mathbb{R}$.

Posons $\Omega_X = \{x_1, \cdots, x_N\}$. Cette loi de probabilité est entièrement déterminée par les couples (x_i, p_i) avec

$$p_i = P(X^{-1}(x_i)).$$

Notons que

$$p_1 + \cdots + p_N = 1.$$

Exemples.

(1) Une urne contient 3 boules, deux rouges et une blanche. On effectue trois tirages successifs et on note le rang d'apparition de la boule blanche. Ici $\Omega = \{(r, r, b), (r, b, r), (b, r, r)\}$ correspondant au tirage des trois boules et la variable aléatoire

$$X : \Omega \to \{1, 2, 3\}$$

correspond au rang de la boule blanche. La loi de X est donc

$$P_X(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1/3 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

On a aussi

$$p_1 = P(X^{-1}(1) = p_2 = P(X^{-1}(2) = p_3 = P(X^{-1}(3) = 1/3.$$

(2) On lance un dé deux fois successivement. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres sortis. Ici

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}.$$

C'est un ensemble fini contenant 36 éléments. La variable aléatoire est la fonction

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

définie par

$$X((i, j) = i + j$$

avec $(i,j) \in \Omega$. Ainsi X est à valeurs dans $\{2,3,\cdots,12\}$. On a, par exemple,

$$P_X(2) = \frac{1}{36}.$$

Plus généralement la loi de probabilité de X vérifie

$$\begin{cases} P_X(k) = \dfrac{k-1}{36} & \text{si } 2 \leq k \leq 6 \\ P_X(k) = \dfrac{13-k}{36} & \text{si } 7 \leq k \leq 12 \end{cases}$$

Remarque. Rappelons que $P(X = x)$ signifie $P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. C'est un ensemble fini. Posons

$$A = \{\omega_1, \cdots, \omega_p\}.$$

Alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^{p} P(\{\omega_k\}).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $A = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$.. Alors

$$P_X(]-\infty, x]) = P(A).$$

On en déduit bien que la donnée des valeurs $P(X = x)$ détermine complètement la loi de X.

2.2. **Variables aléatoires égales presque partout.** Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Elles sont égales presque partout si l'ensemble

$$A = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

qui est dans $\mathfrak{F}$ vérifie

$$P(A) = 0.$$

Nous savons que cela ne signifie pas que A soit vide

Théorème 1. *Soient X et Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Si elles sont égales presque partout, alors $P_X = P_Y$.*

La réciproque est fausse. Le fait que X et Y aient la même loi de probabilité ne signifie pas qu'elles soient égales ni même égale presque partout.

Exemple. On lance une pièce équilibrée et on considère le tirage pile ou face dont le résultat est 0 pour pile et 1 pour face.. On effectue trois lancers. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois ou pile apparaît et soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où face apparaît. On a $\Omega = \{0,1\}^3$ et $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Un résultat s'écrit $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1. Alors

$$P(\{\omega\}) = (\frac{1}{2})^3.$$

Soit k un entier inférieur ou égal à 3. Notons par A_k le sous ensemble de Ω défini par

$$A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\}.$$

Alors

$$P_X(\{k\}) = P(\{\omega, X(\omega) = k) = P(A_k) = C_3^k(\frac{1}{2})^3.$$

De même
$$P_Y(\{k\}) = C_3^k(\frac{1}{2})^3.$$
Les variables X et Y ont la même loi de probabilité.

2.3. La loi de Bernoulli, loi binomiale.

Définition 4. *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ et soit $p \in [0, 1]$.*

(1) On dit X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et
$$P_X(\{0\} = p, \ P_X(\{1\} = 1 - p.$$
On note cette loi $\mathcal{B}(1, p)$.

(2) On dit X suit la loi binomiale de paramètre p si X est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et
$$P_X(\{k\}) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$
pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$. On note cette loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Comme X est fini, sa loi est bien déterminée dès que l'on connait les probabilités des singletons $\{k\}$. On peut vérifier à titre d'exercice que si X suit la loi de binomilale $\mathcal{B}(n, 1/2)$, alors
$$P_X(\mathbb{R}) = P_X(\{0, 1, \cdots, n\}) = \frac{1}{2}^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2}^n (1 + 1)^n = 1.$$
Nous avons vu, dans les chapitres précédents, que la loi de Bernoulli correspondait à une expérience à deux issues, succés et echec et p est la probabilité pour avoir un succés. La loi binomiale correspond au résultat de la somme de n expériences indépendantes, chacune d'elles suivant la loi de Bernoulli.

3. Fonction de répartition, espérance,écart-type d'une variable aléatoire

3.1. Fonction de répartition.

Rappelons la convention :
$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega, \ X(\{\omega) \leq x\}.$$

Définition 5. *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique*
$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
définie par
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut voir facilement que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

(1) $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

(2) Pour tout x, $0 \leq F(x) \leq 1$

(3) F est une fonction croissante.

Supposons que X ne prenne que les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_s$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_s$. Posons

$$P_X(\{x_i\} = p_i.$$

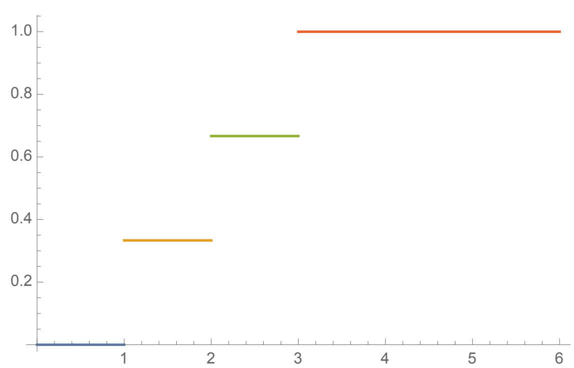
Alors la fonction de répartition F_X est une fonction en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux, croissante vérifiant

(1) $F_X(x) = 0$ pour tout $x < x_1$,

(2) $F_X(x) = p_1 + \cdots + p_i$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[$

(3) $F_X(1)$ pour tout $x <\geq x_r$

Elle est discontinue pour $x = x_1, \cdots, x_s$, le saut de discontinuité est égal à p_i en chacun de ces points x_i. Le graphe d'une fonction de répartition ressemble à :



Exemples.

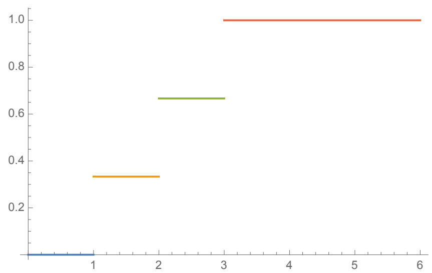
(1) **La loi de Dirac.** Une variable aléatoire X sur l'espace $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$ suit la loi de Dirac d'indice $a \in \mathbb{R}$ si

$$X(\omega_i) = a$$

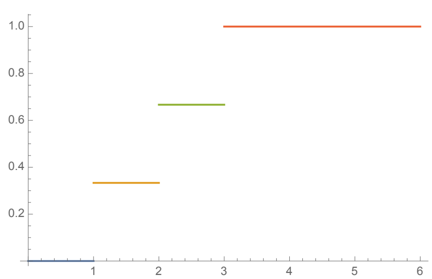
pour tout $i = 1, \cdots, n$. La Fonction de répartition vérifie donc

$$\begin{cases} F_X(x) = 0, \text{ si } x < a, \\ F_X(x) = 1, \text{ si } x \geq a. \end{cases}$$

Le graphe de $F_X(x)$ est (ici $a = 2,5$) :



(2) Soit X une variable aléatoire sur Ω dont la loi est celle de Bernoulli. On dira dans ce cas que X est une variable aléatoire de Bernoulli de papamètre p si elle prend les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Sa fonction de répartition est (ici $p = 1/3$) :



3.2. **Espérance mathématique.** Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1 < \cdots < x_s$.

Définition 6. *On appelle espérance mathématique de X (ou parfois valeur moyenne de X), le nombre réel, noté $E(X)$ défini par*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i$$

où $p_i = P(X - x_i)$.

Cette définition d'espérance se généralise en considérant les moments d'ordre k :

Définition 7. *On appelle moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N},\ k \neq 0$), de X , le nombre réel, noté m_k) défini par*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i^k p_i$$

où $p_i = P(X - x_i)$.

On a donc

$$E(X) = m_1(X).$$

L'espérance s'interprète donc comme l'abscisse du centre de gravité des masses $p_1, \cdots, p_s$ et le moment d'ordre 2 comme un moment d'inertie de l'ensemble de ces masses.

Théorème 2. *On a*

(1) $m_k(X) = E(X^k)$,

(2) Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω de même loi, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

(3) si a, b sont deux réels, alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

(4) Si X et Y sont de plus **indépendantes***, alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration.

(1) La première propriété découle directement de la définition du moment d'ordre k.

(2) Les varaibles X et Y ont la même loi de probabilité. Ceci signifie que X prend les valeurs $x_1 < \cdots < x_s$ et Y prend les valeurs $y_1 < \cdots < y_s$ avec

$$P(X = x_i) = P(Y = y_i) = p_i.$$

Ainsi

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^{s} (x_i + y_i) p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i + \sum_{i=1}^{s} y_i p_i = E(X) + E(Y).$$

(3) On suppose que le scalaire b est la variable aléatoire qui fait correspondre à tout élément de ω la valeur b. Alors
$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{s}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{s}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{s}p_i=aE(X)+b.$$

(4) Si maintenant les variables X et Y sont de plus supposées indépendantes, alors les valeurs de XY sont les scalaires x_iy_j avec $1\leq i,j\leq s$. Comme
$$P(XY=x_iy_j)=p_ip_j,$$
alors
$$E(XY)=\sum_{i,j=1}^{s}x_iy_yp_ip_j=\sum_{i=1}^{s}x_ip_i\sum_{j=1}^{s}y_yp_j=E(X)E(Y).$$

Exemples.

(1) L'espérance d'une variable de Dirac de paramètre a est
$$E(X)=a.$$

(2) L'espérance d'une variable de Bernoulli de papmètre p est
$$E(X)=p.$$

3.3. **Variance, écart-type.** Soit X une variable aléatoire et $E(X)$ son espérance. Considérons la nouvelle variable
$$Z=X-E(X)$$
où $E(X)$ est considérée comme la variable aléatoire
$$E(X)(\omega)=E(X)$$
pour tout $\omega\in\Omega$. Cette variable Z est appelée l'écart de X.

Définition 8. *On a*

(1) On appelle variance de X l'espérance de la variable écart $Z^2=(X-E(X))^2$. On la note $V(X)$ et donc
$$V(X)=E((X-E(X))^2).$$

(2) On appelle écart-type de X le acalaire $\sigma(X)$ défini par
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

On montre facilement

Théorème 3. *On a*
$$V(X)=E((X-m_1)^2)=e(X^2)-(E(X))^2$$
et donc
$$\sigma^2=m_2-m_1^2.$$

Exemples.

(1) La variance et l'écart-type d'une variable de Dirac de paramètre a est nul :

$$V(X) = 0.$$

(2) La variance et l'écart-type d'une variable de Bernoulli de papmètre p est

$$V(X) = p(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

(3) Uen variable aléatoire suit la loi binomiale $B(p, q, n)$ si Les valeurs de X sont $\{0, 1, \cdots, n\}$ et si la probabilité pour que $X = k$ est

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Dans ce cas

$$E(X) = np, \; V(X) = npq, \; \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

EXERCICES

Exercice 1. Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On en tire deux sans remise.

(1) On note par X le plus grand des deux nombres obtenus. Quelle est la oi de probabilité de X ?
(2) On note par Y le plus petit des deux nombres obtenus. Quelle est la oi de probabilité de Y ?

Exercice 2. On lance un dé deux fois successivement. On s'intéresse à la somme des chiffres obtenue après ces deux lancer.s

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
(2) Définir la variable aléatoire X associée à cette expérience.
(3) Calculer $X^{-1}(]-\infty, 8]$ et $X^{-1}([3,1,9,2]$.
(4) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 3. On considère le lancer d'un dé.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
(2) On considère l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = 1$ si ω est impair, sinon $X(\omega) = 0$. Montrer que X est une variable aléatoire.
(3) Quelle est sa fonction de répartition.