

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques: PROBABILITES

Cours Michel GOZE

*Chapitre 3*

---

# Un exemple d'espace probabilisé fini: le modèle de Bernoulli

---

## 1. PRODUIT D'ESPACES PROBABILISÉS

### 1.1. Produit d'ensembles.

**Définition 1.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle ensemble produit, l'ensemble noté  $E \times F$  et défini par

$$E \times F = \{(a, b), a \in E, b \in F\}.$$

Par exemple, si  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $F = \{a, b\}$ , alors

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

On généralise aisément cette définition en considérant le produit de  $n$  ensembles: soient  $E_1, \dots, E_n$   $n$  ensembles. Alors

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}.$$

**Proposition 1.** Soient  $E$  un ensemble fini contenant  $p$  éléments et  $F$  un autre ensemble fini contenant  $q$  éléments. Alors l'ensemble produit  $E \times F$  est fini et contient  $pq$  éléments.

**Exemple.** Soit  $E = \{s, e\}$  un ensemble à deux éléments. Alors  $E \times E$  noté également  $E^2$  contient  $2^2$  éléments:

$$E^2 = \{(s, s), (s, e), (e, s), (e, e)\}.$$

Dans ce cas précis, nous écrirons les couples comme des mots à deux lettres:

$$E^2 = \{ss, se, es, ee\}.$$

Avec cette notation,  $E^3$  sera l'ensemble des mots à trois lettres construits à partir des seules lettres  $s$  et  $e$ :

$$E^3 = \{sss, sse, ses, ess, see, ese, ees, eee\}$$

et donc contient  $2^3$  éléments. Plus généralement  $E^n$  sera composé de mots de longueur  $n$  à partir des seules lettres  $s$  et  $e$ . Il contient  $2^n$  éléments.

Soient  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(F)$  deux sous-ensembles de  $E$  et  $F$  respectivement. Alors  $A \times B$  est le sous-ensemble de  $E \times F$  défini par

$$A \times B = \{(a, b) \in E \times F, a \in A, b \in B\}.$$

En particulier on a

$$(1) \quad A \times B = (A \times F) \cap (E \times B).$$

## 1.2. Produit de deux espaces probabilisés.

Soient  $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$  et  $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, P_2)$  deux espaces probabilisés. Considérons le produit  $\Omega_1 \times \Omega_2$  et la tribu sur cet ensemble produit engendrée par  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ . C'est la plus petite tribu sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$  contenant les ensembles  $A \times B$  avec  $A \in \mathfrak{F}_1$  et  $B \in \mathfrak{F}_2$ . Par abus, on la notera  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ . Par exemple, si  $\mathfrak{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$  et  $\mathfrak{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$ , alors  $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

Définissons à présent une probabilité sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Soient  $A \in \mathfrak{F}_1$  et  $B \in \mathfrak{F}_2$ . Alors  $A \times B \in \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ . Pour définir une probabilité  $P$  sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , utilisons l'identité (1):

$$A \times B = (A \times F) \cap (E \times B).$$

On aura

$$\begin{cases} P(A \times F) = P_1(A), \\ P(E \times B) = P_2(B). \end{cases}$$

Si les événements  $A \times F$  et  $E \times B$  sont indépendants, ce qui sera vrai dans la plupart des cas, alors

$$P(A \times B) = P((A \times F) \cap (E \times B)) = P(A \times F)P(E \times B)$$

et donc

$$(2) \quad P(A \times B) = P_1(A)P_2(B).$$

**Exemple.** Soit  $\Omega = \{s, e\}$  un espace probabilisé fini à deux éléments. Sa tribu est  $\mathcal{P}(\Omega)$  et la fonction de probabilité  $P_1$  est définie par

$$P_1(\{s\}) = p, \quad P_1(\{e\}) = q = 1 - p$$

avec  $0 < p < 1$ . Considérons l'espace produit  $\Omega^2$ . La fonction probabilité est définie par

$$P(\{ss\}) = P_1(\{s\})P_1(\{s\}) = p^2, \quad P(\{se\}) = P(\{es\}) = P_1(\{s\})P_1(\{e\}) = pq, \quad P(\{ee\}) = q^2.$$

Soit  $A \subset \Omega^2$  l'évènement défini par

$$A = \{ss, se, es\}$$

. Alors

$$P(A) = p^2 + 2pq = 2p - p^2.$$

### 1.3. Produit de $n$ espaces probabilisés.

On généralise au cas d'un produit d'un nombre quelconque d'espaces de probabilité, les résultats ci-dessus. Soient  $(\Omega_k, \mathfrak{F}_k, P_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , une famille de  $n$  espaces probabilisés. Considérons le produit

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \cdots \times \Omega_n$$

et la tribu sur cet ensemble produit engendrée par  $A_1 \times \cdots \times A_n$  avec  $A_k \in \mathfrak{F}_k$ . On définit la probabilité  $P$  sur  $\Omega$  par

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2) \cdots P_n(A_n).$$

Cela suppose, dans ce cas aussi, que les événements  $\Omega_1 \times \cdots \times A_k \times \cdots \times \Omega_n$ ,  $k = 1, \dots, n$  sont indépendants.

**Exemple.** Soit  $\Omega = \{s, e\}$  un espace probabilisé fini à deux éléments. Sa tribu est  $\mathcal{P}(\Omega)$  et la fonction de probabilité  $P_1$  est définie par

$$P_1(\{s\}) = p, \quad P_1(\{e\}) = q = 1 - p$$

avec  $0 < p < 1$ . Considérons l'espace produit  $\Omega^n$ . La fonction probabilité est définie par

$$P(\{u_1 \cdots u_n\}) = P_1(\{u_1\}) \cdots P_1(\{u_n\})$$

avec  $u_i \in \{s, e\}$ . En particulier

$$P(\{ss \cdots s\}) = p^n, \quad P(\{ee \cdots e\}) = q^n.$$

## 2. LE MODÈLE DE BERNOULLI

### 2.1. Rappel: les coefficients binomiaux.

Les coefficients binomiaux sont les entiers

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

définis pour  $0 \leq k \leq n$ . Rappelons que, par convention,  $0! = 1$ . Ces coefficients apparaissent dans le développement du binôme:

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^k x^{n-k} y^k + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

En analyse combinatoire,  $C_n^k$  correspond au nombre de parties non ordonnées (ou de combinaisons) formées de  $k$  éléments distincts dans un ensemble de  $n$  éléments.

Ils vérifient la relation

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

cette relation permet de construire le fameux triangle de Pascal, appelé aussi triangle de Tartaglia.

**2.2. Epreuve de Bernoulli.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $A \in \mathfrak{F}$  un évènement. Posons

$$P(A) = p, \quad P(\mathbb{C}_\Omega A) = q = 1 - p.$$

Le réel  $p$  représente la probabilité d'un succès, c'est-à-dire que l'évènement  $A$  soit réalisé et le réel  $q = 1 - p$  représente la probabilité d'un échec. La définition du succès et de l'échec est conventionnelle et est fonction des conditions de l'expérience. Une telle situation est appelée une preuve de Bernoulli.

**Exemples.**

- (1) Le lancer d'une pice quilibrée est une expérience de Bernoulli de paramètre  $p = 0,5$ . Ici

$$\Omega = \{h, t\}$$

( $h$  désignant le côté pile et  $t$  le côté face, head and tail en anglais). Si le succès est l'obtention de pile, l'échec est l'obtention de face. On prend donc  $A = \{h\}$ . alors

$$P(A) = 0,5 = p, \quad P(\{t\}) = 1 - 0,5.$$

- (2) On tire au hasard une boule dans une urne contenant 6 boules blanches et 2 boules noires. On a ici

$$\Omega = \{B_1, \dots, B_6, N_1, N_2\}.$$

On considère comme un succès le fait de tirer une boule noire. On a donc comme évènement

$$A = \{N_1\} \cup \{N_2\}.$$

On a

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Cette expérience est une expérience de Bernoulli de paramètre  $0,25$ .

### 2.3. Schéma de Bernoulli.

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé fini et soit  $\omega \in \Omega$ . Supposons que

$$P(\omega) = p.$$

(en fait il faudrait écrire  $P(\{\omega\}) = p$ . Considérons l'espace

$$\Omega_1 = \{\omega, e\}$$

contenant 2 éléments munie de sa tribu  $\mathfrak{P}(\Omega_1)$  et de la probabilité donnée par

$$P_1(\omega) = p, \quad P_1(e) = q = 1 - p.$$

Soit  $n$  un entier donné et considérons l'espace produit  $\Omega_1^n$ . Un "mot" de  $\Omega_1^n$  est un mot de  $n$  lettres chacune égale soit à  $\omega$  soit à  $e$ . Munissons  $\Omega_1^n$  de la fonction probabilité définie sur les espaces produits. Elle vérifie

$$P_n(u_1 u_2 \cdots u_n) = p^k q^{n-k}$$

s'il existe  $i_1, \dots, i_k$  tels que  $u_{i_j} = \omega$  pour  $j = 1, \dots, k$ , les autres  $u_i$  étant égaux à  $e$ .

Ceci s'interprète en disant que nous avons répété l'expérience associée à  $\Omega$   $n$  fois et que l'on regarde si l'évènement  $\omega$  de probabilité  $p$  est apparu  $k$  fois. On appelle ceci un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ .

**Théorème 1.** *Considérons un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ . Soit  $p_n(k)$  la probabilité pour que l'évènement  $\omega$  apparaisse  $k$  fois lorsque l'expérience  $\Omega$  est répétée  $n$  fois. Alors*

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

*Démonstration.* En effet,  $\Omega_1^n$  contient  $2^n$  éléments. Si  $u$  est un mot de  $\Omega_1^n$  constitué de  $n$  lettres parmi  $\omega$  et  $e$ , sa probabilité, et si  $\omega$  apparaît  $k$  fois dans ce mot, sa probabilité est  $P_2(u) = p^k q^{n-k}$ . Comme il existe  $C_n^k$  mots de ce type dans  $\Omega_1^n$ , on en déduit le résultat.

### Exemples.

- (1) Soit  $\Omega$  l'expérience consistant à jeter une pièce de monnaie non équilibrée. On a l'espace probabilisé

$$\Omega = \{h, t\}, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

et la probabilité est entièrement donnée par

$$P(h) = p, P(t) = q = 1 - p.$$

On s'intéresse à l'évènement "c'est pile ( $h$ ) qui sort". Ici  $\Omega_1 = \Omega$  et donc la probabilité pour que "pile" sorte  $k$  fois lors de  $n$  lancers est

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

- (2) On lance une paire de dés et on note le résultat donné par la somme des chiffres qui apparaissent. Ainsi

$$\Omega = \{2, 3, \dots, 11, 12\}, F = \mathcal{P}(\Omega).$$

Déterminons la probabilité sur  $\Omega$  correspondant au cas où les dés sont équilibrés et identiques, donc indiscernables lors du lancer. On montre facilement que

$$\begin{cases} P(2) = P(3) = P(11) = P(12) = \frac{1}{21}, P(4) = P(5) = P(9) = P(10) = \frac{2}{21}, \\ P(6) = P(7) = P(8) = \frac{3}{21}. \end{cases}$$

On s'intéresse au résultat "la somme vaut 7". Ainsi

$$\Omega_1 = \{7, e\}$$

avec comme probabilité

$$P_1(7) = p = \frac{3}{21}, P_1(e) = \frac{18}{21}.$$

On considère le schéma de Bernoulli correspondant à 5 lancers. La probabilité pour avoir 3 fois la somme 7 lors de ces 5 lancers est

$$p_5(3) = C_5^3 \left(\frac{3}{21}\right)^3 \left(\frac{18}{21}\right)^2 = \frac{5!}{2!3!} \frac{3^3 \cdot 18^2}{21^5} = 10 \frac{36}{7^5}.$$

## 3. LES THÉORÈMES DE DE MOIVRE-LAPLACE ET DE POISSON

3.1. Sur le calcul des  $p_n(k)$ .

On se rend vite compte que le nombre  $C_n^k$  est assez difficile à évaluer. En effet

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

lorsque  $n$  est assez grand n'est plus calculable. Prenons par exemple  $n = 100$  et  $k = 50$ . Alors

$$C_{100}^{50} = \frac{100!}{50!50!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot \dots \cdot 51}{50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 2}$$

qui n'est guère calculable. Le but de ce paragraphe est de montrer comment approximer le résultat.

## 3.2. Le théorème d'approximation de de Moivre-Laplace.

Soit  $s$  un entier naturel. Supposons que  $s$  soit "très grand" par rapport à 1. On notera cette relation d'ordre

$$s \gg 1.$$

La notion de très grand n'est pas définie, mais imaginable!

**Théorème 2.** Soient  $n, p, q = 1 - p$  des entiers tels que  $npq \gg 1$ . Alors

$$(3) \quad C_n^k p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right).$$

Ici le symbole  $\simeq$  signifie "à peu près égal". L'intérêt de cette formule est de donner une valeur approchée facile à calculer. En effet la fonction  $\exp X$  est définie sur n'importe quelle calculatrice scientifique et le réel  $X = -\frac{(k - np)^2}{2npq}$  pour lequel nous devons calculer l'exponentielle est un nombre tout-à-fait standard.

**Exemple.** Prenons  $n = 100$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$  et  $k = 50$ . Alors

$$C_n^k p^k q^{n-k} = C_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \frac{100!}{50!50!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

Calculons  $\exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right)$ .

$$\exp\left(-\frac{(0)^2}{50}\right) = 1.$$

Comme  $npq = 25$  peut être considéré comme grand par rapport à 1, le théorème de de Moivre-Laplace donne

$$C_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 25}} = \frac{1}{10\sqrt{\pi}} \simeq$$

### 3.3. Le théorème d'approximation de Poisson.

Dans le paragraphe précédent, nous avons approché la valeur de  ${}^k_n p^k q^{n-k}$  lorsque le produit  $npq$  était grand par rapport à 1. Ici nous nous intéressons au cas où  $n$  est très-très grand ( $n \rightarrow +\infty$ ) et  $p$  très-très petit ( $p \rightarrow 0$ ), mais le produit  $np$  restant limité.

**Théorème 3.** *Supposons que*

$$\begin{cases} n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow 0 \\ np \simeq a \end{cases}$$

*Alors*

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \exp(-a) \frac{a^k}{k!}$$