

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 7

Fonctions d'une variable aléatoire

1. CHANGEMENT DE VARIABLE ALÉATOIRE

1.1. **Définition.** Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilité et

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

une variable aléatoire sur cet espace. Soit

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction d'une variable réelle.

Définition 1. *Etant données une variable aléatoire X sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, on définit une autre variable aléatoire sur cet espace par*

$$Y = g(X)$$

c'est-à-dire définie par

$$Y(\omega) = g(X(\omega))$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer que Y est une variable aléatoire. Si X est une variable aléatoire finie, et si x_1, \dots, x_s sont les valeurs de X , alors Y est aussi une variable aléatoire finie prenant comme valeurs $g(x_1), \dots, g(x_s)$. Dans le cadre continu, cela n'est pas si simple. On va s'y intéresser dans le paragraphe suivant.

1.2. **Cas où X est continue.** Rappelons que si X est une variable aléatoire continue sur Ω , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$

(condition toujours réalisée dans le cadre fini). Ainsi $g(X)$ est une variable aléatoire continue si

$$g(X)^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, g(X(\omega)) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Evidemment cette condition ne peut être réalisée pour des fonctions g quelconques. Soit

$$A_g(y) = \{x \in \mathbb{R}, g(x) \leq y\}.$$

Il est clair que

$$g(X(\omega)) \leq y$$

si et seulement si

$$X(\omega) \in A_g(y).$$

Nous supposons donc qu'au moins g vérifie les propriétés suivantes :

- (1) L'ensemble $A_g(y)$ doit être une réunion ou intersection d'un nombre fini ou dénombrable d'intervalles.
- (2) Les événements $\{g(X) = \pm\infty\}$ soient négligeables.

Pour être sûrs que ces conditions soient réalisées, nous supposons que g est continue et même dérivable. Dans ce cas Y est bien une variable aléatoire continue, sa loi est donnée par

$$P_Y(]-\infty, y]) = P(\{\omega \in \Omega, Y(\omega) \leq y\}) = P(\{\omega \in \Omega, g(X)(\omega) \leq y\})$$

et la fonction de répartition

$$F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

1.3. **Exemples.** 1. Supposons que la fonction g soit bornée, c'est-à-dire, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que

$$a \leq g(x) \leq b.$$

Dans ce cas, on aura

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq b, \\ 0 & \text{si } y < a. \end{cases}$$

Prenons par exemple une fonction dont le graphe est donné dans la Figure 1.

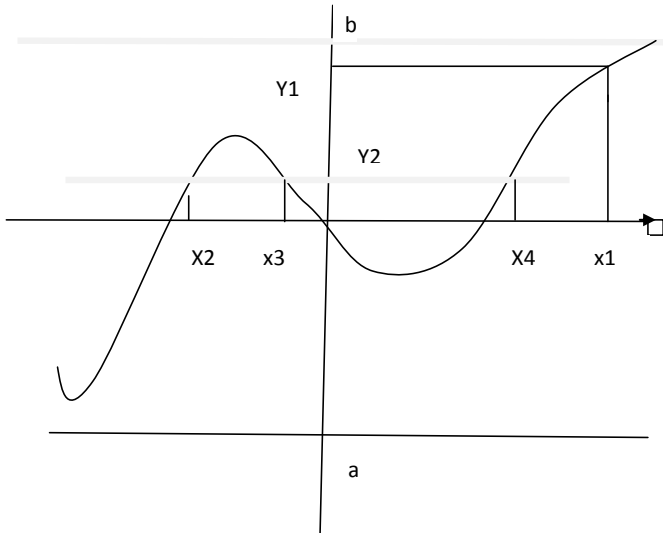


Figure 1

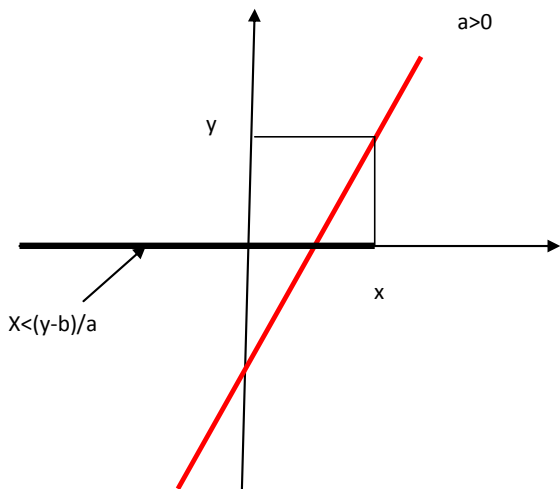


Figure 2 : $g(x)=ax+b$

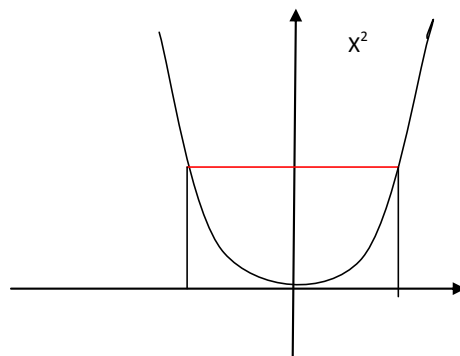


Figure 3 : $g(x)=x^2$

Dans cet exemple, $g(x) \leq y_1$ si et seulement si $x \leq x_1$. Ainsi

$$F_Y(y_1) = P(Y \leq y_1) = P(X \leq x_1) = F_X(x_1).$$

Par contre $g(x) \leq y_2$ si et seulement si $x \in [x_3, x_4] \cup]-\infty, x_2]$. On a donc

$$F_Y(y_2) = P(x_3 \leq X \leq x_4) + P(X \leq x_2) = F_X(x_2) + F_X(x_4) - F_X(x_3).$$

2. $g(x) = 2x - 2$ (voir Figure 2).

$$F_Y(y) = P(Y \leq 2x - 2) = P(X \leq \frac{y+2}{2})$$

et donc

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+2}{2}\right).$$

3. $g(x) = x^2$ (voir Figure 3). Il est clair que si $y < 0$ alors $F_Y(y) = 0$. Par contre, si $y \geq 0$, alors

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

2. DENSITÉ DE PROBABILITÉ, ESPÉRANCE DE $Y = g(X)$

2.1. Densité de probabilité. Nous allons supposer dans un premier temps que g est bijective. Ceci signifie qu'à un élément $x \in \mathbb{R}$ est associé un élément $y = g(x)$. On suppose de plus que g est dérivable et que la dérivée ne s'annule pas. On a alors, si g est croissante ($g' > 0$)

$$F_Y(y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X \circ g^{-1}(y)$$

et si g est décroissante

$$F_Y(y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X \circ g^{-1}(y).$$

La densité de la fonction Y est donc

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \pm (F_X \circ g^{-1}(y))' = \pm \frac{f_X(x)}{g'(x)}.$$

Supposons à présent que g ne soit pas bijective. Alors pour y donné, l'équation $g(x) = y$ a plusieurs solutions et l'on a :

Proposition 1. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ les racines de $y = g(x)$, y donné, c'est-à-dire

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) = \dots$$

Alors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \dots$$

Exemple. Prenons $g(x) = ax + b$, $a \neq 0$. L'équation $y = ax + b$ n'a qu'une seule solution $x = \frac{y-b}{a}$. Comme $g'(x) = a$, on a

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

2.2. **Espérance.** Nous savons que l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy.$$

Soit $Y = g(X)$ et supposons que que $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$. Alors

$$y f_Y(y) = g(x_1) f_X(x_1) + g(x_2) f_X(x_2).$$

On en déduit

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Ceci est encore vrai dans le cas général

Proposition 2. *Soit $Y = g(X)$ où g est dérivable et la dérivée ne s'annule pas. Alors l'espérance de Y est*

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$