CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Système Informatique

Mathématiques: PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 3

Espaces probabilisés finis et dénombrement

1. Problèmes de dénombrement

1.1. **Arrangements.** Soit E un ensemble contenant n éléments:

$$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

Rappelons que le produit cartésien E^p est l'ensemble formé des p-uples $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})$ d'éléments de E. Chaque e_{i_j} apparaissant dans ce p-uple est appelé une coordonnée de $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p})$.

Définition 1. *On appelle arrangement des n éléments de E p à p (avec $p \leq n$) tout élément de E^p ayant des coordonnées différrentes 2 à 2.*

Soit par exemple $E = \{a, b, c, d\}$. Les éléments de E^2 sont

(a, a)	(a, b)	(a, c)	(a, d)
(b, a)	(b, b)	(b, c)	(b, d)
(c, a)	(c, b)	(c, c)	(c, d)
(d, a)	(d, b)	(d, c)	(d, d)

Le produit E^2 contient $16 = 2^4$ éléments. De manière générale, on a

Proposition 1. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Pour tout entier p non nul, le produit cartésien E^p contient p^n éléments*

Reprenons l'exemple. Les arrangements 2 à 2 correspondent aux couples dont les coordonnées sont différentes c'est-à-dire:

	(a, b)	(a, c)	(a, d)
(b, a)		(b, c)	(b, d)
(c, a)	(c, b)		(c, d)
(d, a)	(d, b)	(d, c)	

Il y a donc 12 arrangements 2 à 2 de E. Dans le cas général, nous avons:

Proposition 2. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Pour tout entier p non nul, le nombre d'arrangements p à p de E est*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

1.2. **Permutations.** Soit E un ensemble fini contenant n éléments.

Définition 2. *On appelle permutation de E tout élément de E^n dont les coordonnées sont deux à deux différentes.*

Une permutation de E n'est rien d'autre qu'un arrangement de E n à n où n est la cardinalité (le nombre d'éléments) de E. On en déduit

Proposition 3. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments.Le nombre de permutations de est*

$$P_n = n!.$$

Il suffit de faire dans A_n^p, $p = n$ et de se rappeler que, par convention, $0! = 1$.

Rappelons qu'une application

$$f : E \to E$$

est dite **injective** si pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$. Ceci signifie que deux éléments distincts de E on deux images distinctes. L'application f est dite **surjective** si pour tout élément $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, c'est-à dire tout élément de E est l'image de quelqu'un. Enfin l'application f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. En général, l'une seule des deux propriétés que sont l'injectivité et la surjectivité n'implique pas la bijectivité. La théorie des automates, très en vogue actuellement, est friande des cas particuliers où l'injectivité implique la bijectivité, c'est-à-dire des cas où ces deux notions sont synonymes. C'est ce qui se passe dans la situation qui nous intéresse ici:

Proposition 4. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Alors toute application injective $f : E \to E$ est aussi bijective (et donc surjective).*

Soit $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et soit $f : E \to E$ une bijection de E. Alors l'image de f, soit $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ ne contient que des éléments deux à deux distincts. On en déduit que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une permutation de E. Inversement toute permutation de E définit une bijection de E dans E. Ainsi

Proposition 5. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Le nombre de bijections $f : E \to E$ est $n!$.*

1.3. **Combinaisons.** Revenons aux arrangements de E^p.

Définition 3. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. On dit que deux arrangements p à p définissent la même combinaison s'ils ne diffèrent que par l'ordre de leurs coordonnées.*

Chaque combinaison p à p donne par permutation de ces p coordonnées, $p!$ arrangements. On en déduit:

Proposition 6. *Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Le nombre de combinaisons p à p est*
$$\binom{p}{n} = 1, = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Dans l'exemple du premier paragraphe, les seules combinaisons sont
$$(a,b),\ (a,c),\ (a,d),\ (b,c),\ (b,d),\ (c,d).$$
On a bien
$$\binom{2}{4} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2} = 6$$
permutations 2 à 2.

1.4. **Quelques propriétés des coefficients $\binom{p}{n}$.** Les coefficients $\binom{p}{n}$ s'appellent les coefficients binomiaux tout simplement car ils sont les coefficients apparaissant dans la formule du binôme de Newton
$$(x+y)^n = x^n + \binom{1}{n}x^{n-1}y + \binom{2}{n}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^{n-p}y^p + \cdots + \binom{n-1}{n}xy^{n-1} + y^n.$$
Ces coefficients vérifient les propriétés suivantes:

(1) $\binom{1}{n} = 1,\ \binom{1}{n} = \binom{n-1}{n} = n.$

(2) $\binom{n-p}{n} = \binom{p}{n}.$

(3) $\binom{p}{n} = \binom{p}{n-1} + \binom{p-1}{n-1}.$

C'est cette dernière propriété qui permet de construire le fameux triangle de Pascal, appelé aussi triangle de Tartaglia (probablement l'auteur de cette découverte):

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Remarquons, pour terminer, que pour des valeurs de p ou n relativements grandes, ce coefficient $\binom{p}{n}$ est quasiment impossible à calculer.

1.5. **Arrangements, permutations et combinaisons avec répétitions.** Soit un ensemble fini $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ à n éléments. On a défini un arrangement des n éléments de E p à p comme un élément de E^p dont les coordonnées sont deux à deux différentes. Si on considère plus généralement un élément de E^p, sans condition sur les coordonnées, on parlera dans ce cas d'**arragement avec répétition**. Ainsi tout élément de E^p est un arrangement avec répétition. On en déduit que le nombre d'arrangement avec répétition p à p est égal à n^p.

On peut égalemnt définir une notion de permutation avec répétition. Donnons nous n entier positif $p_1, \cdots, p_n$ avec $p_1 + \cdots + p_n = s$. Bien entendu $s \geq n$. Les éléments de E^s contenant p_1 coordonnées égales à e_1, p_2 coordonnées égales à e_2, ainsi de suite jusqu'à p_n coordonnées égales à e_n. Un tel élément de E^s s'appellera une permutation avec répétition.

Exemple. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à 2 éléments. Les permutations correspondant à $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$, et donc $s = 5$ sont

(a, a, b, b, b)	(a, b, a, b, b)	(a, b, b, a, b)	$a, b, b, b, a)$	(b, a, a, b, b)
(b, a, b, a, b)	(b, a, b, b, a)	(b, b, a, a, b)	(b, b, a, b, a)	(b, b, b, a, a)

Proposition 1. *Le nombre de permutations avec répétition sur E avec p_1 coordonnées égales à e_1, p_2 coordonnées égales à e_2, ainsi de suite jusqu'à p_n coordonnées égales à e_n est*

$$\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)!}{p_1! p_2! \cdots p_n!}.$$

Enfin, deux arrangements avec répétition qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs coordonnées sont dits définir la même **combinaison avec répétition**.

Proposition 2. *Le nombre d'arrangements p à p avec répétition sur E est égal à*

$$\Gamma_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-p)!} = \binom{p}{n+p-1}.$$

Exemples

(1) Une séquence d'ADN est constituée d'un enchainement de 4 nucléotides labellisés A,C,G,T pour Adénine, Cytosine, Guanine et Thymine. Nous pouvons nous intéresser dans un premier temps aux arrangements de deux nucléotides. Il s'agit d'arrangements avec répétitions correspondant à $n = 4$ et $p = 2$. Il y a donc $n^p = 4^2 = 16$ dinucléotides possibles:

$$\begin{array}{cccccccc} AA & AC & AG & AT & CA & CC & CG & CT \\ GA & GC & GG & GT & TA & TC & TG & TT \end{array}$$

(2) Le tiercé dans l'ordre lors d'une course de chevaux est associé un arrangement sans répétition. Par exemple, si la course comporte 20 chevaux, le nombre de tiercés possibles à l'arrivée est $A_{20}^3 = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

2. Lois de probabilité et combinatoire

2.1. **Définition.** Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ un ensemble fini à n éléments. Considérons la tribu $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'espace $(\Omega, \mathfrak{F})$ est donc un espace probabilisable. Pour d/'efinir une loi de probabilité sur cet espace, il suffit de considérer une application

$$P : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

telle que

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1.$$

En effet, il est aisé d'étendre P à $\mathfrak{F}$, et cette application vérifie les conditions pour être une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (voir Définition 6 Chapitre 2).

Rappelons un epu de vocabulaire.

(1) Ω est l'ensemble fondamental, ou univers ou population.
(2) Les éléments ω_i sont les épreuves ou les évènements élémentaires.
(3) $P(\omega_i)$ est la probabilité de l'épreuve ω_i.
(4) Tout sous-ensemble A de Ω est un évènement.

Rappelons enfin que si A est une partie de Ω, alors $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A.

2.2. **Probabilité uniforme et combinatoire.** On suppose idans ce paragraphe que tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. On aura donc

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Si $A \supset \Omega$ est un évènement, sa probabilité sera donc égale à:

$$P(A) = \frac{\text{card(A)}}{n} = \frac{\text{card(A)}}{\text{card}(\Omega)}$$

Cette formule est bien simple, la seule difficult que l'on pourra rencontrer est celle de déterminer convenable Ω, et les cardinalités $n = card(\Omega)$ et pour un évènement A donné, $card(A)$.

(1) **Jeu de cartes.** On considère un jeu de N cartes (en général $N = 52$ ou 32. On distribue k cartes à un joueur. L'univers Ω est formé de l'ensemble des "jeux" à cinq cartes. Ceci n'est pas encore suffisant pour déterminer Ω. Soit l'ordre e distribution des cartes compte pour la suite de la partie de cartes, soit il n'intervient pas (ce qui est le cas dans toutes les parties classiques: belote, rami, ...). Si l'ordre de distribution n'intervient pas, alors le nombre d'éléments de Ω est donné par le nombre de combinaisons $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$.
(2) **Lancer de dés** Lorsqu'on lance une fois un dé (non truqué), la probabilité d'avoir un numéro donné correspond à la probabilité d'avoir un évènement élémentaire . Supposons qu'on lance le dé k fois. Dans ce cas, l'univers sera

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^k.$$

Dans ce cas on a

$$card(\Omega) = 6^k.$$

(3) **Tirage dans une urne.** Considérons une urne contenant N boules de différentes couleurs. Dans cette urne on effectue n tirages. La détermination de l'ensemble fondamental Ω dépend du mode du tirage.

(a) **Tirages simultanés.** On tire les n boules en même temps. L'ensemble Ω est l'ensemble de toutes les parties de n éléments d'un ensemble de N éléments. On a donc ici

$$\mathrm{Card}\Omega = \binom{n}{N}.$$

(b) **Tirages avec remise.** On tire les n boules une par une et chaque boule tirée est remise dans l'urne avant le prochain tirage. Dans ce cas, une même boule peut êtree tiré plusieurs fois. L'ensemble Ω est l'ensemble de toutes les listes de n éléments d'un ensemble de N éléments. On a donc ici

$$\mathrm{Card}\Omega = N^n.$$

(c) **Tirages sans remise.** On tire les n boules une par une et les boules tirées ne sont pas remises dans l'urne. Dans ce cas, une même boule ne peut pas être tirée plusieurs fois. L'ensemble Ω est l'ensemble de tous les arrangements de n éléments d'un ensemble de N éléments. On a donc ici

$$\mathrm{Card}\Omega = A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

EXERCICES

Exercice 1. On considère l'ensemble formé des trois lettres E,O,N.

(1) Ecrire l'ensemble des permutations de cet ensemble.
(2) Calculer la probabilité des évènements suivants:
    (a) mot de la langue française.
    (b) mot de la langue anglaise.
    (c) mot en verlan.
    (d) mot ni français, ni anglais.

Exercice 2.

(1) Combien de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) peut-on former avec notre alphabet? Trouver deux mots écrits avec les mêmes lettres mais avec des sens différents?
(2) Combien de mots à 7 lettres peut-on ècrire à partir du mot CELLULE?

Exercice 3. Quel est le nombre de manières de place 8 convives autour d'une table?

Exercice 4. On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

(1) Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 coeurs?
(2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une paire?

Exercice 5. On lance un dé 6 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir les six numéros de 1 à 6?

Exercice 6. Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. Déterminer la probabilité de tirer trois nombres dont la somme soit 8

(1) pour des tirages avec remise,
(2) pour des tirages sans remise.

Exercice 7. ¡on considère trois urnes U_1, U_2 et U_3:

- U_1 contient 7 boules noires et 3 blanches,
- U_2 contient 4 boules noires et 4 blanches,
- U_3 contient 1 boule noire et 4 blanches,

On choisit une urne au hasard et on tire une boule.

(1) Quelle est la probabilité qu'elle soit noire?
(2) Sachant que cette boule est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1?

Exercice 8. Comparer la probabilité d'obtenir au moins un as avec quatre lancers d'un dé avec celle d'obtenir au moins un double as en 24 lancers de deux dés.

Exercice 9. Un exercice pour ces temps de grippe. Le quart d'une population a été vacciné contre la grippe. Au cours de l'épidémie actuelle, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour neuf non vaccinés.

(1) Les évènements "avoir été vacciné" et être tombé malade" sont-ils indépendants?
(2) Au cours de cette épidémie, il y a un malade sur douze parmi les vaccinés. Quel était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné?