FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2PC et Cycles.

Mathématiques: SERIES et INTEGRALES

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 2

Séries numériques

Dans tout ce chapitre, lorsque nous parlerons de suites ou séries numériques, il s'agira nécessairement de suites ou séries à termes réels. Lorsque, en fin de chapitre, nous aborderons le cas des suites ou séries à termes complexes, nous le spécifierons en parlant de suites ou séries complexes.

1. Généralités sur les séries numériques

1.1. Généralités sur les séries numériques.

Définition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Posons $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Les S_n forment une nouvelle suite et au lieu de parler de suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on parle de "série de terme général u_n" notée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Le nombre S_n s'appelle la somme partielle de la série de terme général u_n. Prenons par exemple la suite géométrique de raison $r \neq 1$ dont le premier terme est u_0. Nous avons calculé au chapitre précédent la somme partielle et trouvé

$$S_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Ainsi, l'étude de la série de terme général $u_n = u_0 r^n$, c'est-à-dire l'étude de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_0 r^n$$

correspond à l'étude de la suite de terme général $S_n = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

1.2. **Convergence-Divergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.**

Définition 2. *La série de terme général u_n est dite convergente si la suite de terme général S_n admet une limite quand $n \to +\infty$. (i.e. si S_n admet une limite finie quand $n \to +\infty$). Si une telle limite existe, on note $S = \Sigma_{n=0}^{+\infty} u_n$ et S est appelé somme de la série.*
La série de terme général u_n est dite divergente si la suite de terme général S_n est divergente.

Ainsi la limite d'une série numérique, si elle existe, est unique.

Exemple. On considère un gâteau carré de coté 1 que l'on divise en deux. On en mange la moitié puis on redise en deux la partie restante. On en mange la moitié, ainsi de suite. Notons u_1 la fraction de gâteau mangée la première fois. On a donc

$$u_1 = \frac{1}{2}.$$

Si u_2 est la fraction de gâteau mangée la deuxième fois, on a

$$u_2 = \frac{1}{4}$$

et la fraction totale mangée alors est

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

De façon générale, si u_n est la fraction de gâteau mangée la n-ième fois, alors

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

et la part totale mangée est

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Il est clair que la limite de cette série est 1 (tout le gâteau), et on écrit :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

1.3. **Sur la convergence de la série géométrique.** On appelle série géométrique, la série de terme général $u_n = u_0 r^n$. La suite (u_n) est la suite géométrique de raison r. Nous avons vu au début de cette section que, si $r \neq 1$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Nous savons que r^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini si $\mid r \mid < 1$. Si $\mid r \mid > 1$ la limite est infinie. De plus, si $r = 1$, $S_n = u_0(n+1)$ et la suite (S_n) diverge (vers $\pm\infty$) si $u_0 \neq 0$; si $r = -1$ on a $S_{2n} = u_0$ et $S_{2n+1} = 0$ et la suite (S_n) diverge (pas de limite) si $u_0 \neq 0$. On a donc :

Proposition 1. *Si la raison r d'une série géométrique $\sum_{n\geq 0} u_0 r^n$ ($u_0 \neq 0$) vérifie $\mid r \mid < 1$ alors la série converge et on a*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_0 r^n = \frac{u_0}{1-r}.$$

Si la raison vérifie $\mid r \mid \geq 1$, la série diverge.

1.4. **Une condition nécessaire de convergence.** Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors la suite S_n admet une limite S. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0.$$

Proposition 2. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0:*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

2. Critères de convergence des séries à termes positifs

Le premier critère que nous venons de voir, et qui est valable pour des séries à termes quelconques (pas nécessairement positifs est le suivant

Proposition 3. *Soit la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Sin terme général ne tend pas tend vers 0, alors elle diverge.*

Dans tout ce paragraphe on suppose que les séries $\sum_{n\geq 0}$ sont à termes positifs, c'est-à- dire que $u_n \geq 0$ pour tout n.

2.1. **Le critère de comparaison.**

Théorème 1. *Soit deux série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ à termes positifs telles que*

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

pour tout n (ou à partir d'un certain rang)
- *Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.*

2.2. **Le critère de d'Alembert.**

Théorème 2. *Soit une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *à termes positifs.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *alors la série converge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *alors la série diverge.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ *alors on ne peut pas conclure.*

Dire que l'on ne peut conclure lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ signifie qu'il existe des exemples de séries divergentes vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et des exemples de séries convergentes vérifiant la même propriété.

Exemples

1. Soit la série de terme général $u_n = \frac{n^5}{2^n}$. Cette série est bien à termes positifs et on peut vérifier que le terme général tend vers 0.. Pour appliquer le critère de d'Alembert calculons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^5} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{2} < 1$$

on en déduit que la série est convergente (mais on ne sait pas calculer la somme de cette série).

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série est appelée série harmonique. Ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure. On peut montrer par ailleurs que cette série est divergente.

2.3. **Le critère de Cauchy.**

Théorème 3. *Soit une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *à termes positifs.*
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ *alors la série converge.*
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ *alors la série diverge.*
- *Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ *alors on ne peut pas conclure.*

.

Exemple

Soit la série de terme général $u_n = (\frac{2n+1}{5n+2})^n$. Calculons

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n} = \frac{2n+1}{5n+2}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right) = \frac{2}{5} < 1.$$

Cette série converge d'après le critère de Cauchy.

2.4. **Critere de comparaison à une intégrale. La série de Riemann.**

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On définit

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

On note

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

Cette intégrale n'est pas une intégrale de Riemann, c'est une intégrale généralisée (en $+\infty$). Si F a une limite quand t tend vers $+\infty$ on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente, sinon on dit qu'elle diverge.

Théorème 4. *Comparaison à une intégrale. Si f est une fonction positive continue et décroissance pour $x \geq a$, la série de terme général $u_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Ainsi*

- $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} f(n)$ *est convergente* $\Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente.*
- $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} f(n)$ *est divergente* $\Longleftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est divergente.*

Idée de la démonstration. Supposons $a = 1$. On a pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$, ainsi en sommant on obtient $S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$. Si l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ qui est croissante est non majorée (d'après la partie droite de l'inégalité) donc diverge vers $+\infty$; ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. Si c'est la série qui diverge, i.e la suite (S_n) diverge alors la partie gauche de l'inégalité implique que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge elle aussi. On peut obtenir de manière analogue l'autre équivalence.

Séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série à termes positifs du type

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

où α est un réel positif.

Proposition 4. *Si $\alpha > 1$ la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.*
Si $\alpha \leq 1$ la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$ la série diverge (grossièrement) puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha > 0$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ puisque $f'(x) = -\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}$. On peut donc utiliser le critère de comparaison avec une intégrale et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sera de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

- Si $\alpha = 1$ alors $\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^t = \ln t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$. Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $\alpha \neq 1$ alors $\int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}[x^{1-\alpha}]_1^t = \frac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & si\ 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & si\ \alpha > 1. \end{cases}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent si $\alpha > 1$ et divergent si $0 < \alpha < 1$.

2.5. **Critère de convergence par équivalence.**

Définition 3. *On dira que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont équivalentes à l'infini si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On écrira dans ce cas $u_n \sim_\infty v_n$.

Théorème 5. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs. Si*

$$u_n \sim_\infty v_n$$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $u_n \sim_\infty v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc à partir d'un certain rang

$$1 - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1 + \varepsilon$$

soit $v_n(1-\varepsilon) < u_n < v_n(1+\varepsilon)$. Le critère de comparaison permet de conclure.

2.6. **Critère de convergence via la série de Riemann.**

Soit u_n le terme général d'une série numérique, $u_n \geq 0$. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$$

avec $l \neq 0$. On dit dans ce cas que u_n est équivalent à $1/n^\alpha$ et on écrit

$$u_n \simeq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Alors si $\alpha > 1$ la série de terme général u_n converge. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge.

Exemple. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{n+1}{n^3+2}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, la fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré. Donc ici

$$u_n \simeq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi la série de terme général u_n est équivalente à la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Cette dernière est convergente, donc le série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+2}$$

est convergente.

Remarque. Si

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$$

alors à partir d'un certain rang $n^\alpha u_n < 1$ et donc $u_n < \frac{1}{n^\alpha}$. Si de plus $\alpha > 1$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et, d'après le critère de comparaison, $\sum u_n$ aussi. Si

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$$

alors à partir d'un certain rang $n^\alpha u_n > 1$ et donc $u_n > \frac{1}{n^\alpha}$. Si de plus $\alpha \leq 1$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et, d'après le critère de comparaison, $\sum u_n$ aussi.

2.7. **Un exemple: les séries de Bertrand.** On appelle série de Bertrand une série de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Théorème 6. *La série de Bertrand* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

- *converge si* $\alpha > 1, \forall \beta$,
- *diverge si* $\alpha < 1, \forall \beta$,
- *converge si* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$,
- *diverge si* $\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$.

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

3. Etude des séries à termes quelconques

On va regarder dans ce paragraphe comment étudier des séries dont les termes ne sont pas tous de même signe.

3.1. **Séries absolument convergentes.** Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'ait pas ses termes de même signe. On peut alors s'intéresser à la série dont le terme général est $\mid u_n \mid$, la valeur absolue de u_n. Cette série est donc à termes positifs et les critères de convergence des séries à termes positifs peut lui être appliquée.

Définition 4. *On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente si la série* $\sum_{n\geq 0} \mid u_n \mid$ *est convergente.*

L'intêret de la convergence absolue est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 7. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente alors elle est convergente.*

Exemple. Considérons la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{n^2}.$$

Le signe de u_n est celui de $\cos n$, donc cete série n'est pas à termes positifs. Considérons la série des valeurs absolues

$$\mid u_n \mid = \frac{\mid \cos n \mid}{n^2}.$$

C'est une série à termes positifs. Comme $\mid n \mid \leq 1$, on a

$$\mid u_n \mid \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $1/n^2$ est, d'après le paragraphe 2.3 cette série est convergente. Donc la série $\sum_{n>0} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Remarque. La réciproque du théorème précédent est fausse. Considérons par exemple la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant le critère des séries alternées et pourrons prouver que cette série converge. Par contre la série des valeurs absolues

$$u_n = \frac{1}{n}$$

est une série de Riemann qui diverge.

Définition 5. *Une série numérique convergent mais non absolument convergente sera dite simplement convergente.*

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est simplement convergente.

3.2. **Séries alternées.**

Définition 6. *On appelle série alternée une série dont le terme général u_n est alternativement positif puis négatif, c'est-à-dire qu'il s'écrit*

$$u_n = (-1)^n a_n \text{ ou bien } u_n = (-1)^{n+1} a_n$$

avec $a_n \geq 0$ pour tout n. Ainisi $\sum \mid u_n \mid = \sum a_n$.

Théorème 8. *Soit une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$. Alors si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est convergente.*

Ce critère est très pratique car il ramène l'étude de la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ à l'étude de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Démonstration. Considérrons les deux sous-suites de la suite (S_n) formées pour la première des termes d'incise pair et pour la seconde des tempes d'induce impair. Posons donc $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$. On a

$$A_n = S_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}.$$

Par hypothèse, la suite (a_n) est déxcroissance et à termes positifs. On en déduit que la suite (A_n) est à termes positifs. Comme

$$A_n - A_{n-1} = a_{2n} - a_{2n-1} \leq 0$$

la suite (A_n) est déxcroissance minorée par 0. Elle converge. De même, on a

$$B_n = S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2)) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1}$$

et donc

$$B_n \leq a_0.$$

De plus

$$B_n - B_{n-1} = S_{2n+1} - S_{2n-1} = a_2 n - a_{2n-1}.$$

Comme la suite (a_n) est positive et déxcroissance, la suite (B_n) est croissante et majorée par a_0. Elle est donc aussi convergente. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n,$$

on en déduit que la suite (S_n) converge, d'où le résultat.

Exemple. Considérons la série
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}.$$
C'est une série alternée. Ici $a_n = \frac{1}{n}$. Cette suite est déxcroissance et tend vers 0. D'après le critére des séries alterndés, cette série converge.

3.3. **Le critère d'Abel.** Ce critère généralise celui des séries alternées. Il est intéressant dans des séries faisant apparaître des termes périodiques bornés comme des fonctions sinus ou cosinus.

Théorème 9. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est telle que*
$$u_n = a_n.b_n$$
avec
(1) *la suite* (a_n) *est décroissante vers* 0*,*
(2) *Il existe une constante* M *telle que pour tout* n *on ait*
$$\mid \sum_{k=0}^{n} b_k \mid \leq M,$$
alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

Exemple. Considérons la série de Fresnel
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n}.$$
Nous avons $\mid u_n \mid \leq \frac{1}{n}$. On majore donc par une série divergente, le critère d'absolue convergence ne donne rien. Utilisons le critère d'Abel. On pose $a_n = 1/n$ et $b_n = \cos n$. On démontrera en exercice l'inégalité
$$\mid 1 + \cos 1 + \cos 2 + ... + \cos n \mid \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})}.$$
Ainsi le critère d'Abel s'applique et la série est convergente.

4. Séries complexes

Les définitions de base sont analogues à celles du cas réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Posons $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série complexe de terme général u_n et notée
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
Le nombre S_n s'appelle la somme partielle de la série de terme général u_n. La série complexe de terme général u_n est dite convergente si la suite complexe de terme général S_n admet une limite quand $n \to +\infty$. Si une telle limite existe, on note $S = \Sigma_{n=0}^{+\infty} u_n$ et S est appelé somme de la série. La série complexe de terme général u_n est dite divergente si la suite complexe de terme général S_n est divergente.

Posons $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$S_n = U_n + iV_n$$

avec $U_n = a_0 + \cdots + a_n$, et $V_n = b_0 + \cdots + b_n$ et S_n converge si et seulement si chacune des suites rélles U_n et V_n converge. La série complexe $\sum u_n$ converge donc si et seulement si chacune des séries rélles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge.

Définition 7. *La série complexe $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série à termes positifs*

$$\sum |u_n| = \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

converge.

Comme dans le cas réel, nous avons le résultat suivant:

Théorème 10. *Si la série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle converge.*

Notons, que dans ce cas aussi, la réciproque est fausse.

Exercice 1. Etudier la convergence des séries de termes général :

1. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = \frac{n+1}{n^3+4}$
3. $u_n = cos(1/n)$.

Exercice 2. En utilisant les critères de Cauchy ou d'Alembert étudier les séries à termes positifs de terme général

1. $u_n = \frac{2^n}{ln(n)}$
2. $u_n = \frac{2^n ln(n)}{3^n}$
3. $u_n = (\frac{n+2}{3n+1})^n$.
4. $u_n = \frac{n+2}{(3n+1)(n+1)}$.

On rappelle que lorsque n devient très grand, alors

$$ln(1 + 1/n) \simeq 1/n.$$

Exercice 3. Trouver la nature des séries de terme général

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3+1}$

Exercice 4. Trouver la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{sinn}{3n-1}.$$

Exercice 5. Etudier l'absolue convergence des séries de terme général

1. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$
2. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout n

$$\mid 1 + cos1 + cos2 + ... + cosn \mid \leq 2$$

et

$$\mid sin1 + sin2 + \cdots + sinn \mid \leq 2.$$

Pour cela on écrira $cosx$ et $sinx$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} et on montrera que

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$