ALGEBRE LINEAIRE et GEOMETRIE

Cours de mathématiques pour LICENCE 2

Cours et Exercices corrigés [1]

Elisabeth Remm

1. Edité par Ramm Algebra Center

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de première et deuxième année de Licence Mathematiques. On y étudie les espaces vectoriels de dimension 1 et 2, c'est-à-dire les droites vectorielles et les plans vectoriels. On introduit les produits scalaires et on étudie la géométrie vectorielle qui s'en déduit, appelée aussi géométrie euclidienne. On s'intéresse également aux applications linéaires et les endomorphismes qui sont en relation avec ce produit scalaire. Pour terminer ce cours, on commencera à regarder comment réduire, c'est-à-dire exprimer dans une forme simple, les endomorphismes d'un espace vectoriel réel ou complexe.

Le programme officiel de ce cours, tel qu'il figure sur les plaquettes de la Licence de Mathématiques de l'UHA est le suivant :

1. Espaces euclidiens : Produit scalaire, norme associée, orthogonalité, angle (cosinus), orthogonal d'un sous-espace vectoriel, base orthonormée, Gramm-Schmitt. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminant dans une base orthonormée, interprétation géométrique (sinus, aire). Dans $\mathbb{R}^3$, produit vectoriel, produit mixte et déterminant dans une base orthonormée, interprétations géométriques (sinus, aires, volumes).

2. Projections orthogonales sur un sous-espace vectoriel, Isométries et matrices orthogonales, classification des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

3. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique. Diagonalisation d'un endomorphisme.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires

1.1 Les espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel réel ou complexe a été vue en première année. Nous faisons dans ce chapitre un bref rappel des notions essentielles et indispensables pour la suite de ce cours. Nous noterons par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Lorsque nous ne voudrons pas distinguer ces deux ensembles, nous utiliserons le symbole $\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{K}$ désignera l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Soit E un ensemble dont les éléments, qui seront appelés "vecteurs", seront notés par une majuscule fléchée, comme $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ ou même indexée, $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}$. Les éléments de $\mathbb{K}$, appelés "scalaires" seront notés par une minuscule latine ou grecque, x,y,α qui peuvent être indexées x_1,x_2,α_3.

Définition 1 *On dit qu'un ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il possède les propriétés suivantes*

1. *Il est muni d'une première opération* **interne**, *appelée addition, qui associe à deux éléments quelconques $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ de E un troisième élément noté $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$, cette opération possédant les propriétés suivantes :*
   (a) *Elle est associative* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in E, \quad (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) + \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}),$
   (b) *Elle est commutative :* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{X},$
   (c) *Il existe un élément neutre $\overrightarrow{0} \in E$, appelé vecteur nul :* $\forall \overrightarrow{X} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{X},$
   (d) *Tout élément $\overrightarrow{X}$ de E possède un symétrique $(\overrightarrow{-X}) \in E$ par rapport à $\overrightarrow{0}$:*

$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{K}, \exists (\overrightarrow{-X}) \in E, \quad \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{-X}) = \overrightarrow{0}.$$

2. *Il est muni d'une deuxième opération* **externe**, *appelée la multiplication par un scalaire ou multiplication externe, qui à un élément* $\overrightarrow{X}$ *de* E *et un scalaire* α *de* $\mathbb{K}$ *fait correspondre un vecteur noté* $\alpha\overrightarrow{X}$ *de* E*, cette opération vérifiant les propriétés suivantes*
   (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ \alpha(\beta\overrightarrow{X}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{X}$,
   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ (\alpha+\beta)\overrightarrow{X} = \alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{X}$,
   (c) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E,\ \alpha(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = \alpha\overrightarrow{X} + \alpha\overrightarrow{Y}$,
   (d) $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.

Notez que nous ne parlons pas (encore) de multiplication de vecteurs. Ceci viendra plus tard. Comme conséquences directes de cette définition, on montre les propriétés suivantes :

1. $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 0\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$,.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$,
3. $\alpha\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
4. $\forall \overrightarrow{X} \in E, -\overrightarrow{X} = -1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{-X}$.

Toutes les propriétés présentées dans la définition ci-dessus permettent de simplifier des expressions linéaires entre vecteurs de E. Par exemple

$$3(2\overrightarrow{X} - 4\overrightarrow{Y}) + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 6\overrightarrow{X} - 12\overrightarrow{Y} + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 11\overrightarrow{X} - 11\overrightarrow{Y} = 11(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}).$$

1.1.2 Exemples d'espaces vectoriels

Les exemples ci-dessous ne sont pas démontrés. On se reportera au cours de première année et il est suggéré de refaire toutes les démonstrations.

1. $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En effet si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x + iy \in \mathbb{C}$, alors $\alpha(x + iy) = \alpha x + i\alpha y$ et la multiplication externe est bien définie. Notons la remarque fondamentale suivante : les deux espaces vectoriels, $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, bien qu'ayant le même ensemble sous-jacent à savoir l'ensemble $\mathbb{C}$ sont totalement différents en tant qu'espaces vectoriels. On notera également que $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ car la multiplication externe n'est pas définie. En effet si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}$, alors $\alpha = a + ib$ et $\overrightarrow{X} = x$ et $\alpha\overrightarrow{X} = (a + ib)x = ax + ibx$ et ceci n'appartient pas toujours à $\mathbb{R}$. Par exemple $\alpha = i$ et $\overrightarrow{X} = 2$, alors $\alpha\overrightarrow{X} = 2i \notin \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels. Cet espace vectoriel est assez délicat à étudier. Il est à la base de la théorie des nombres, de la théorie de Galois. Il est totalement différent, comme espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}$.
4. Soit n un entier positif non nul et $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\}$ l'ensemble des n-uples de nombres réels. Alors $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux opérations suivantes :
   (a) $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$,
   (b) $\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

   On vérifie sans peine que toutes les propriétés de la définition sont vérifiées.
5. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'addition est définie par
$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

et la multiplication par un scalaire par

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)).$$

L'ensemble des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour l'ensemble des fonctions dérivables.

1.2 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné

Définition 2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit F une partie* **non vide** *de E.*

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

1. *La somme $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$ de deux vecteurs de F est encore dans F,*
2. *Le produit $\alpha\overrightarrow{X}$ de $\alpha \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ est encore dans F.*

Ces deux conditions peuvent se résumer en une seule : F est un sous-espace vectoriel de E si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in F$, alors

$$\alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{Y} \in F.$$

On vérifie sans peine que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Cette remarque est très utile pour montrer que ensemble donné est muni d'une structure d'espace vectoriel, il suffit de voir qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

La propriété suivante concernant des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné sera très utile dans l'étude géométrique des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1 *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Elle est laissée en exercice. Mais il est utile de la faire.

Remarque. Il n'en est rien concernant la réunion de sous-espaces. En général si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, alors la réunion $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et considérons

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}, \ F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}.$$

Soient $\overrightarrow{X} = (1, -1)$ et $\overrightarrow{Y} = (2, 2)$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont bien dans la réunion $F_1 \cup F_2$ car $\overrightarrow{X} \in F_1$ et $\overrightarrow{Y} \in F_2$. Mais

$$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = (1, -1) + (2, 2) = (3, 1)$$

et ce vecteur n'est ni dans F_1 ni dans F_2 et donc n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$. Cette réunion n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E, nous pouvons nous intéresser au plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient cette réunion et qui peut être E lui même. Nous sommes alors conduit à la définition suivante

Proposition 2 *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble noté F_1+F_2 et défini ainsi*
$$F_1+F_2=\{\overrightarrow{X_1}+\overrightarrow{X_2},\ \overrightarrow{X_1}\in F_1,\overrightarrow{X_2}\in F_2\}$$
est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant le sous-ensemble $F_1\cup F_2$.

Démonstration. Montrons que F_1+F_2 est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble F_1+F_2 est un sous-ensemble de E qui est non vide puisque $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ est un élément de F_1+F_2. Soient $\overrightarrow{Y},\overrightarrow{Z}\in F_1+F_2$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$. Montrons que $\alpha_1\overrightarrow{Y}+\alpha_2\overrightarrow{Z}\in F_1+F_2$. Par définition de F_1+F_2 il existe des vecteurs $\overrightarrow{X_1}\in F_1$, $\overrightarrow{X_2}\in F_2$ tels que $\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{X_1}+\overrightarrow{X_2}$. De même, il existe $\overrightarrow{U_1}\in F_1,\overrightarrow{U_2}\in F_2$ tels que $\overrightarrow{Z}=\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\alpha_1\overrightarrow{Y}+\alpha_2\overrightarrow{Z}&=\alpha_1(\overrightarrow{X_1}+\overrightarrow{X_2})+\alpha_2(\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2})\\&=(\alpha_1\overrightarrow{X_1}+\alpha_2\overrightarrow{U_1})+(\alpha_2\overrightarrow{X_2}+\alpha_2\overrightarrow{U_2}).\end{aligned}$$
Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $\alpha_1\overrightarrow{X_1}+\alpha_2\overrightarrow{U_1}\in F_1$. De même $\alpha_2\overrightarrow{X_2}+\alpha_2\overrightarrow{U_2}\in F_2$. Ainsi $\alpha_1\overrightarrow{Y}+\alpha_2\overrightarrow{Z}$ se présente comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Ainsi F_1+F_2 est un sous-espace vectoriel de E. Comme il contient F_1 et F_2, il contient le sous-ensemble $F_1\cup F_2$. Manifestement, c'est le plus petit contenant cet ensemble puisque un espace vectoriel est stable par somme donc doit contenir les éléments $\overrightarrow{Y}+\overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y},\overrightarrow{Z}\in F_1\cup F_2$ donc en particulier contenir les éléments du type $\overrightarrow{Y}+\overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y}\in F_1$, $\overrightarrow{Z}\in F_2$.

Remarque : sous-espaces supplémentaires. Supposons de plus que les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 vérifient
$$F_1\cap F_2=\{\overrightarrow{0}\}.$$
Rappelons que tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent le vecteur nul de E et donc leur intersection n'est jamais vide. Tout vecteur de F_1+F_2 s'écrit comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Mais cette décomposition n'est pas en général unique (quand on n'a pas d'hypothèse sur l'intersection $F_1\cap F_2$). Toutefois, on montre aisément qu'avec l'hypothèse $F_1\cap F_2=\{\overrightarrow{0}\}$, tout vecteur de $F_1\oplus F_2$ s'écrit de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. On dit alors que $F_1\oplus F_2$ est la somme directe des sous-espaces F_1 et F_2. Si de plus nous avons
$$F_1\oplus F_2=E$$
nous dirons dans ce cas que les sous-espaces vectoriels de E sont **supplémentaires**.

Remarque : somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels. Nous pouvons également définir la somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels de E : soient $F_1,F_2,\cdots,F_p$, p sous-espaces vectoriels de E. Si tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de la somme $F_1+F_2+\cdots+F_p$ s'écrit de manière unique
$$\overrightarrow{X}=\overrightarrow{X_1}+\overrightarrow{X_2}+\cdots+\overrightarrow{X_p}$$
avec $\overrightarrow{X_i}\in F_i$, pour $i=1,\cdots,p$, alors nous écrirons cette somme
$$F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_p.$$
Si pour $p=2$, la somme F_1+F_2 est directe si et seulement si $F_1\cap F_2=\{\overrightarrow{0}\}$, pour $p>2$, cette propriété s'énonce ainsi $F_1+F_2+\cdots+F_p=F_1\oplus\mathbb{F}_2\oplus\cdots\oplus F_p$ si et seulement si pour tout $i=1,\cdots,p$ on a
$$F_i\cap(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_p)=\{\overrightarrow{0}\}.$$
Et ceci n'est pas équivalent à dire que les intersections deux à deux de ces sous-espaces sont réduites à $\{0\}$.

1.3 Dépendance et indépendance linéaires

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ un système de p vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* de ces p vecteurs tout somme de la forme

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$. Une telle somme est bien un vecteur de E.

1.3.1 Vecteurs linéairement dépendants, vecteurs libres

Définition 3 *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement dépendants s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls tels que*

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0}.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est liée.

Définition 4 *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement indépendants si*

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0}$$

implique

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_p = 0.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est libre. Il est clair qu'une famille qui n'est pas liée est libre et qu'une famille qui n'est pas libre est liée. Des définitions ci-dessus on déduit directement les remarques suivantes :

1. Aucun vecteur d'une famille libre ne peut être nul.
2. Toute sous-famille d'une famille de vecteurs indépendants est aussi libre :
   Proposition 3 *Soient $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ des vecteurs de E. Si la famille $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est libre alors toute sous-famille $\{\overrightarrow{X_{i_1}}, \overrightarrow{X_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{X_{i_k}}\}$ avec $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots, p\}$ est aussi libre.*
3. Toute famille de vecteurs contenant une sous-famille de vecteurs dépendants est aussi liée :
   Proposition 4 *Soient $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ des vecteurs de E. Si la famille $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est liée alors toute famille $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}, \overrightarrow{X_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{X_{p+k}}\}$ est aussi liée.*

1.3.2 Espaces vectoriels de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si quel que soit l'entier positif n, on peut trouver une famille libre de n vecteurs de E, nous dirons que E *est de dimension infinie*. Des exemples sont proposés dans la fiche d'exercice. Ces espaces vectoriels seront étudiés en troisième année de Licence. Ils jouent des rôles fondamentaux en analyse fonctionnelle. Nous nous intéressons ici au cas des espaces de dimension finie, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas de dimension infinie. Ceci équivaut à la définition suivante :

Définition 5 *Un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est dit de dimension finie s'il existe un entier positif k tel que toute famille de k vecteurs de E soit liée.*

Soit donc n l'ordre maximum d'un système libre de vecteurs de E. Il existe donc au moins une famille $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_n}\}$ de vecteurs linéairement indépendants et toute famille de $n+1$ de vecteurs ou plus est nécessairement liée. Ce nombre n est applelé la dimension de E et nous noterons

$$n = \dim E.$$

L'un des problèmes essentiels que nous rencontrerons est celui d'évaluer cette dimension après avoir vérifié que l'espace vectoriel était bien de dimension finie.

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors toute famille libre de n vecteurs est appelée une base de E.*

Il est d'usage d'écrire les vecteurs d'une famille libre qui est une base ainsi :$\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$.

Théorème 1 *Etant donnée une base quelconque $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de l'espace vectoriel E de dimension n, tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E s'exprime de manière unique*

$$\overrightarrow{X} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$$

comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Démonstration. Considérons les $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$. D'après la définition de n, ces vecteurs sont linéairement dépendants. Il existe donc des scalaires non tous nuls, $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, tels que

$$\alpha\overrightarrow{X} + \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}.$$

Le coefficient α de $\overrightarrow{X}$ ne peut être nul sinon nous aurions une combinaison linéaire $\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$ entre les vecteurs de la base choisie, ce qui est contraire à la définition d'une base. En divisant par α, on déduit

$$\overrightarrow{X} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_n\overrightarrow{e_n}$$

avec $\beta_i = -\alpha_i/\alpha$. Ainsi $\overrightarrow{X}$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire des vecteurs de base. Montrons que cette écriture est unique. Soit donc

$$\overrightarrow{X} = \beta_1'\overrightarrow{e_1} + \beta_2'\overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_n'\overrightarrow{e_n}$$

une autre écriture de $\overrightarrow{X}$. En soustrayant ces deux expressions, nous obtenons

$$\overrightarrow{0} = (\beta_1 - \beta_1')\overrightarrow{e_1} + (\beta_2 - \beta_2')\overrightarrow{e_2} + \cdots + (\beta_n - \beta' n)\overrightarrow{e_n}.$$

Comme les vecteurs de la base sont linéairement indépendants, tous les coefficients de cette combinaison linéaire nulle sont tous nuls, ce qui donne

$$\beta_1 = \beta_1', \beta_2 = \beta_2' = \cdots = \beta_n = \beta_n'$$

est les deux écritures sont les mêmes.

Dire que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base peut également s'interpréter en disant qu'une base est une famille génératrice de E. Plus généralement

Définition 7 *Soit $\{\overrightarrow{X}_1, \cdots, \overrightarrow{X}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice si tout vecteur de E s'écrit (pas nécessairement de manière unique) comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.*

Il est clair que toute famille qui contient une famille génératrice est elle même génératrice.

Proposition 5 *Une base est donc une famille génératrice minimale.*

Démonstration. La démonstration est laissée en exercice.

Nous en déduisons que pour montrer qu'une famille de vecteurs de E forme une base de cet espace, nous devons montrer

1. que cette famille est libre maximale,
2. ou bien que cette famille est génératrice minimale,
3. ou bien que tout vecteur s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille,
4. ou bien que cette famille est libre et génératrice.

On remarquera qu'il existe dans tout espace vectoriel une infinité de base.

1.3.3 Somme directes de sous-espaces vectoriels et bases

Nous pouvons caractériser le fait que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ de sous-espace vectoriel de E soit directe, et cette caractérisationsera fort utile pour démontrer qu'une somme est directe :
Si $\{\overrightarrow{X_1^1}, \overrightarrow{X_1^2}, \cdots, \overrightarrow{X_1^{i_1}}\}$ est une base de F_1,$\{\overrightarrow{X_2^1}, \overrightarrow{X_2^2}, \cdots, \overrightarrow{X_2^{i_2}}\}$ est une base de F_2,etc,$\{\overrightarrow{X_p^1}, \overrightarrow{X_p^2}, \cdots, \overrightarrow{X_p^{i_p}}\}$ est une base de F_p, alors $F_1 + F_2 + \cdots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si

$$\{\overrightarrow{X_1^1}, \overrightarrow{X_1^2}, \cdots, \overrightarrow{X_1^{i_1}}, \overrightarrow{X_2^1}, \overrightarrow{X_2^2}, \cdots, \overrightarrow{X_2^{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{X_p^1}, \overrightarrow{X_p^2}, \cdots, \overrightarrow{X_p^{i_p}}\}$$

est une base de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$.

1.3.4 Calcul analytique

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Donnons nous une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur de E. Il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Les scalaires $x_1, x_2, \cdots, x_n$ s'appellent les composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$.

Considérons une autre base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e}'_1, \cdots, \overrightarrow{e}'_n\}$ de E. Le même vecteur $\overrightarrow{X}$ se décompose de manière unique dans cette nouvelle base :

$$\overrightarrow{X} = x'_1\overrightarrow{e'_1} + x'_2\overrightarrow{e'_2} + \cdots + x'_n\overrightarrow{e'_n}.$$

Quelles sont les relations entre les composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ du vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$ et les composantes $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ de ce vecteur $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}'$? Pour cela considérons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e'_i}$ de la nouvelle base :

$$\overrightarrow{e'_i} = a_{1,i}\overrightarrow{e_1} + a_{2,i}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,i}\overrightarrow{e_n} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\overrightarrow{e_j}.$$

En remplaçant les vecteurs $\overrightarrow{e'_i}$ dans l'expression de $\overrightarrow{X}$ relative à cette base, on obtient

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X} &= x'_1 \sum_{j=1}^n a_{j,1}\overrightarrow{e}_j + x'_2 \sum_{j=1}^n a_{j,2}\overrightarrow{e}_j + \cdots + x'_n \sum_{j=1}^n a_{j,n}\overrightarrow{e}_j \\ &= (\sum_{k=1}^n x'_k a_{1,k})\overrightarrow{e_1} + (\sum_{k=1}^n x'_k a_{2,k})\overrightarrow{e_2} + \cdots + (\sum_{k=1}^n x'_k a_{n,k})\overrightarrow{e_n}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n$ et cette écriture est unique. On en déduit :

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{k=1}^n x'_k a_{1,k} \\ x_2 = \sum_{k=1}^n x'_k a_{2,k} \\ \cdots \\ x_n = \sum_{k=1}^n x'_k a_{n,k} \end{cases}$$

Pour les habitués du calcul matriciel, nous pouvons synthétiser ces dernières relations en considérant la matrice P de changement de base :

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible, son déterminant est non nul, car c'est une matrice de changement de base. Nous obtenons la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Si nous notons par X la matrice colonne dont les éléments sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$ et de même pour X', alors la relation ci-dessus s'écrit simplement

$$X = PX'.$$

1.3.5 Le théorème de la base incomplète

Nous rappelons dans ce paragraphe un théorème fort pratique pour faire du calcul analytique dans un sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une famille de vecteurs de E linéairement indépendants. Si $n = \dim E$, alors $p \leq n$ car n correspond au nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans E. Si $p = n$, alors $\mathcal{F}$ est une base de E et nous avons plus rien à faire. Supposons $p < n$. Il existe nécessairement un vecteur $\overrightarrow{X}$ non nul tel que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{X}\}$ soit libre, sinon $\mathcal{F}$ serait une famille maximale de vecteurs indépendants ce qui contredirait l'hypothèse $p < n$. Ecrivons $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{e_{p+1}}$ et considérons la famille $\mathcal{F}_1 = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}\}$. En répétant à $\mathcal{F}_1$ le même raisonnement, on ne sera arrêté qu'après avoir adjoint à la famille $\mathcal{F}$ des vecteurs au nombre de $n - p$. Nous avons ainsi démontré :

Théorème 2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$, avec $p < n$, une famille de vecteurs de E linéairement indépendants. Il existe alors des vecteurs $\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ tels que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ soit une base de E.*

Une conséquence intéressante est la suivante : soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Soit donnée une base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de ce sous-espace. Nous pouvons toujours compléter cette base en une base $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Ceci s'avèrera fort utile lorsque nous voudrons faire du calcul analytique dans E en mettant en évidence le sous-espace F. Dans les chapitres suivants, nous verrons de nombreuses applications.

1.4 Applications linéaires

Nous allons revenir, dans ce paragraphe, sur les applications linéaires entre deux espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs du premier espace en une combinaison linéaire de vecteurs du deuxième espace.

1.4.1 Définition

Définition 8 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit*

$$f : E \to F$$

une application de E dans F. Elle est appelée linéaire si elle vérifie

1. $\forall \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \in E, \quad f(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) = f(\overrightarrow{X_1}) + f(\overrightarrow{X_2})$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha\overrightarrow{X}) = \alpha f(\overrightarrow{X}), \ \forall \overrightarrow{X} \in E$.

Nous en déduisons immédiatement que si $\alpha_1\overrightarrow{X_1}+\alpha_2\overrightarrow{X_2}+\cdots+\alpha_p\overrightarrow{X_p}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de E, alors

$$f(\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{X_p}) = \alpha_1 f(\overrightarrow{X_1}) + \alpha_2 f(\overrightarrow{X_2}) + \cdots + \alpha_p f(\overrightarrow{X_p}).$$

1.4.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. De la définition, nous déduisons

$$f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$$

où $\overrightarrow{0_E}$ désigne le vecteur nul de E et $\overrightarrow{0_F}$ celui de F. Ainsi le sous-ensemble de E des vecteurs qui ont pour image par f le vecteur nul contient au moins $\overrightarrow{0_E}$. On appelle Noyau de f ce sous-ensemble de E :

$$\ker(f) = \{\overrightarrow{X} \in E, \ f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{0_F}\}.$$

Proposition 6 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. La démonstration est simple mais il est conseillé de la faire en tant qu'exercice.

Le noyau d'une application linéaire contient des informations sur cette application. Rappelons dans un premier temps la notion d'injectivité. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *injective* si deux éléments distincts x_1 et x_2 de A ont pour image par f deux éléments distincts de B. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ est injective si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in A$, l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Proposition 7 *L'application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement son noyau* $\ker(f)$ *est réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$.*

Démonstration. Supposons que f soit injective. Nous devons déterminer son noyau. Soit $\overrightarrow{X} \in \ker(f)$. Il vérifie donc $f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{0_F}$. Mais comme f est linéaire, cette application vérifie aussi $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $f(\overrightarrow{X}) = f(\overrightarrow{0_E})$. L'injectivité de f implique donc $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0_E}$ et donc le noyau de f ne contient que le vecteur nul de E. Démontrons à présent la réciproque. Soit $f : E \to F$ une application linéaire vérifiant $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$. Considérons deux éléments $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ de E. Supposons que $f(\overrightarrow{X_1}) = f(\overrightarrow{X_2})$. La linéairité de f implique

$$f(\overrightarrow{X_1}) - f(\overrightarrow{X_2}) = f(\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2})$$

et donc $f(\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2}$ est un vecteur du noyau de f qui par hypothèse ne contient que le vecteur nul. D'où $\overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{0_E}$ ce qui donne

$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_2}$$

et l'injectivité de f s'en déduit.

On appelle Image de l'application linéaire $f : E \to F$ le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$ constitué de tous les éléments images par f des éléments de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\overrightarrow{X}),\ \forall \overrightarrow{X} \in E\}.$$

Proposition 8 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. La démonstration est ici aussi simple mais il est toujours conseillé de la faire en tant qu'exercice.

L'information sur f contenue dans ce sous-espace de F concerne la surjectivité. Rappelons la définition générale. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *surjective* si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ est surjective si pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Proposition 9 *L'application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Ici il n'y a pas grand chose a démontrer car c'est une reformulation même de la définition de la surjectivité.

Remarque : Comment déterminer $\mathrm{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie. Supposons que E soit de dimension finie n. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E se décompose sur cette base $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. Considérons le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de F. Soit $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $\overrightarrow{X} \in E$ tel que $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X}) = f(x_1\overrightarrow{e}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Ceci nous montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$. On en déduit que si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est une base de E, alors la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une famille génératrice de F. Mais notons que cette famille n'est pas en général libre et n'est pas en général une base de $\mathrm{Im}(f)$. Le théorème suivant apporte quelque précision sur ceci.

1.4.3 Cas de la dimension finie : le théorème Noyau-Image

Supposons à présent que les espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ soient de dimension finie.

Théorème 3 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a alors*

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, il en est de même du sous-espace $\ker(f)$. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de $ker(f)$. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver des vecteurs linéairement indépendants $\{\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ tels que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ soit une base de E. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ à partir de cette base. D'après la remarque ci-dessus, $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par la famille $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_p}), f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont dans $\ker(f)$, leurs images par f sont nulles et donc la famille $\mathcal{B}$ se réduit à $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Ainsi les vecteurs $f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$ engendrent $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est libre. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire nulle entre ces vecteurs :

$$\overrightarrow{0}_F = a_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + a_{p+2} f(\overrightarrow{e_{p+2}}) + \cdots + a_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Comme f est linéaire, il vient

$$\overrightarrow{0}_F = f(a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}).$$

Ainsi le vecteur $a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}$ est dans le noyau de f. Comme $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de $ker(f)$, nous avons donc

$$a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n} = b_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + b_p\overrightarrow{e_p}$$

soit

$$b_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + b_p\overrightarrow{e_p} - a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} - a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots - a_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ sont linéairement indépendants, nous en déduisons

$$b_1 = \cdots = b_p = a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$$

et donc $\overrightarrow{0_F} = a_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + a_{p+2} f(\overrightarrow{e_{p+2}}) + \cdots + a_n f(\overrightarrow{e_n})$ implique $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$. La famille $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est donc libre dans $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est génératrice , c'est une base de cet espace. Ceci montre que

$$\dim \mathrm{Im}(f) = n - p = \dim E - \dim \ker(f)$$

d'où le théorème.

Définition 9 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle rang de f et on le note* $\mathrm{rg}(f)$ *la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$ *:*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi le théorème noyau image donne la valeur du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker(f).$$

On notera que dans cette formule la dimension de F n'intervient pas.

1.4.4 Applications.

1. Pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(f) = \dim F$. En effet, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, sa dimension est inférieure ou égale à celle de F et nous avons $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement s'ils ont la même dimension.
2. Rappelons qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi une application linéaire est bijective si et seulement si on a à la fois
   (a) $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$,
   (b) $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.
3. Supposons que $F = E$ c'est-à-dire que f soit une application linéaire

$$f : E \to E$$

On dit dans ce cas que l'application linéaire est un *endomorphisme* de E. Supposons que f soit injective. Alors $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et donc $\dim \ker(f) = 0$. Ainsi

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Mais ici $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. Ils coïncident donc :

$$E = \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi f est surjective donc bijective.

Proposition 10 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors si f est injectif, il est aussi surjectf et donc bijectif. De même si f est surjectif, il est aussi injectif donc bijectif.*

Démonstration. La deuxième partie de cette proposition se démontre comme la première.

1.5 Calcul analytique. Matrices d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. La remarque qui suit va être la base du calcul analytique.

L'application linéaire f est entièrement déterminée dès que l'on connait les images des vecteurs d'une base de E.

Expliquons cette remarque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Si $\overrightarrow{X} \in E$, il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

et le n-uple $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{X}) &= f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) \\ &= x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}). \end{aligned}$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{X}$ étant donné, ses composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont aussi données et donc $f(\overrightarrow{X})$ peut être calculé dès que l'on connait les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$.

Donnons à présent une base de F : $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ (nous supposons $p = \dim F$). Chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e}_i)$ est dans F et se décompose ainsi

$$f(\overrightarrow{e}_i) = \alpha_{1,i}\overrightarrow{f_1} + \alpha_{2,i}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \alpha_{p,i}\overrightarrow{f_p}$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Rangeons ces coefficients $\alpha_{i,j}$ sont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$$

Dans ce rangement, le premier indice du coefficient $\alpha_{i,j}$ correspond au numéro de la ligne et le deuxième au numéro de la colonne contenant ce coefficient. En fait nous écrivons en colonne les composantes des transformées des vecteurs de la base de E : $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_{n-1}}), f(\overrightarrow{e_n})$. Ce mode de rangement permet de trouver facilement les composantes du vecteur image $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ relative à la base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ donnée : l'équation $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ est équivalente à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notons enfin que cette matrice de f ainsi déterminée dépend fortement des bases choisies de E et F. Dans la dernière partie de ce cours, nous regarderons comment trouver de "bonnes bases" afin que l'écriture matricielle de f en soit simplifiée.

1.6 Exercices

Exercice 1

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 x_2 = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \cos x_1 + 2e^{x_2} - x_3^2 = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$.

Exercice 2

Soit $gl(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

1. Montrer que c'est un espace vectoriel réel de dimension finie.
2. Soit $so(n)$ le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices vérifiant
$$M = -{}^tM.$$
Montrer que c'est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Est-ce un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3

Dans un espace vectoriel E à quatre dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$ de composantes
$$\overrightarrow{X_1} = (2, 1, 4, -3),\ \overrightarrow{X_2} = (1, -1, -1, -3),\ \overrightarrow{X_3} = (1, 2, 5, 0).$$

1. Montrer que ces vecteurs sont linéairement dépendants et former la relation par laquelle ils sont liés.
2. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs et en donner une base.
3. Compléter cette base pour obtenir une base de E

Exercice 4

Dans un espace vectoriel complexe à trois dimension rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on donne les vecteurs
$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{e_2} + i\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{e_3} + i\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{e_1} + i\overrightarrow{e_2}.$$
Montrer que ces trois vecteurs forment une base et trouver dans cette base les composantes du vecteurs $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels F_1,F_2 et F_3 sont dits supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}$$
avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2$ et $\overrightarrow{X_3} \in F_3$.

1. Soient F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, F_2 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ et F_3 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0, 2, 0)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.
2. Soit F_4 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_4} = (1, 2, 1)$, F_5 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (1, 1, 0)$ et F_6 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 1)$. Montrer que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i, j = 4, 5, 6$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6

(Dans certains exercices qui suivent, nous ne noterons plus, pour en prendre l'habitude, les éléments des espaces vectoriels par des lettres surmontées d'un vecteur. Prendre garde aux notations et aux données). On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0,\ \text{ et } x + z = 0\right\}$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$, $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G le sous-espace engendré par (u_1, u_2, u_3). Quelle sa dimension ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et un élément de G ?

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}&v_1 = (1, 2, 0, 1)\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (2, 2, 2, 2),\\ &w_1 = (1, 2, 1, 0)\ w_2 = (-1, 1, 1, 1),\ w_3 = (2, -1, 0, 1),\ w_4 = (2, 2, 2, 2).\end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3,
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.
3. Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est liée.
4. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre.
5. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4. Déterminer une base de G.
6. Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires.

Exercice 8

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$, définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que u est linéaire.

2. On note (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2, f_3, f_4) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ en fonction de (f_1, f_2, f_3, f_4).
3. Écrire la matrice de u dans ces bases canoniques.
4. Montrer que $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les (e_1, e_2, e_3) et $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$.

Exercice 9

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par la donnée des images de vecteurs de base :

$$u(e_1) = w_1,\ u(e_2) = w_2,\ u(e_3) = w_3.$$

1. a) Exprimer (w_1, w_2, w_3) en fonction de (e_1, e_2, e_3). En déduire la matrice de u dans la base canonique.
   b) Soit $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. Trouver une base de $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 10

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées aux matrices suivantes (on déterminera anant les calculs les dimensions p et n)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Dérminer une base de $\ker f$.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 13

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de u dans les nouvelles bases.

Exercice 14

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de cher f et $\operatorname{Im} f$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Chapitre 2

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: la géométrie vectorielle

2.1 L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce chapitre nous allons nous intéresser à la géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace, c'est-à-dire à l'étude vectorielle des plans et des droites dans $\mathbb{R}^3$. Nous affinerons notre étude à l'aide d'un outil non plus linéaire mais bilinéaire en un sens que nous préciserons, le produit scalaire. Cet outil permet de faire des mesures de longueur, d'angle dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 La base canonique de $\mathbb{R}^n$

Par définition l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, n\}.$$

Nous identifierons naturellement $\mathbb{R}^1$ et $\mathbb{R}$. Dans le premier chapitre nous avons rappelé que $\mathbb{R}^n$ était muni d'une structure d'espace vectoriel réel, les opérations concernées étant

1. l'addition : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

2. la multiplication externe par un scalaire : si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha\overrightarrow{X} = \alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n).$$

Le vecteur nul $(0, 0, \cdots, 0)$ sera noté $\overrightarrow{0}$.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \cdots, 0),\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots, \overrightarrow{e_n} = (0, 0, \cdots, 0, 1).$$

Si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ il se décompose de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

ce qui montre que $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et donc que $\mathbb{R}^n$ est bien de dimension n. Cette base "privilégiée" sera appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, les scalaires x_i sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base canonique.

2.1.2 Les applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Considérons les deux espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, elle se présente sous la forme

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_p).$$

Posons $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, p$. Chacune des applications f_i est une application linéaire $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ainsi f apparaît comme la composition des p applications linéaires :

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$$

et donc l'étude de f se ramène à l'étude des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposons donc dans un premier temps que $p = 1$, soit

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et posons $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y$. Comme f est linéaire, nous pouvons écrire

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 f(1, 0, \cdots, 0) + x_2 f(0, 1, , 0, \cdots, 0) + x_n f(0, 0, \cdots, 1)$$

soit

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Nous retrouvons là le fait que f est entièrement définie par les images des vecteurs de base, ici la base canonique. Posons

$$f(\overrightarrow{e_1}) = a_1, f(\overrightarrow{e_2}) = a_2, \cdots, f(\overrightarrow{e_n}) = a_n.$$

Alors

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Proposition 11 *Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

avec $a_i = f(\overrightarrow{e_i}) \in \mathbb{R}$.

Nous en déduisons

Corollaire 1 *Toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ où les f_i sont des applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent donc sous la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \cdots \\ f_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \cdots + a_{p,n}x_n \end{array} \right.$$

Nous déduisons que la matrice de l'application linéaire f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

L'expression analytique de f s'écrit ainsi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Sa dimension p est inférieure à n et rappelons que si $p = n$ alors $F = \mathbb{R}^n$. Du théorème de la base incomplète nous déduisons directement le résultat suivant :

Proposition 12 *Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n variables*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

La résolution de tels systèmes linéaires a été vue en première année. Rappelons toutefois, qu'une manière un peu longue mais algorithmique de résoudre un tel système est la méthode du pivot. A ce niveau là, il serait intéressant de concevoir un programme sur PYTHON de résolution des systèmes linéaires.

Considérons le système linéaire précédent définissant le sous-espace vectoriel F. La matrice de ce système

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

peut être vue comme la matrice d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ écrite dans les bases canoniques. Si p est la dimension de F, alors par définition de cette matrice, comme F est le noyau de f, nous avons $p = \dim \ker f$ et le théorème noyau image implique

$$\mathrm{rg}(f) = n - p.$$

Ce rang correspond au nombre d'équations linéaires indépendantes dans le système linéaire de définition de f.

Droites et plans dans $\mathbb{R}^3$

Un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ est par définition un sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. D'après la remarque ci-dessus, il est défini comme le noyau d'une application linéaire de rang 1 et donc par une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

dont au moins un des coefficients est non nul. Supposons par exemple que ce soit a_1. Nous pouvons écrire

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$$

et le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent

$$\overrightarrow{X} = (-\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3, x_2, x_3).$$

Une base de $\mathcal{P}$ est donnée par la famille

$$\{\overrightarrow{v_1} = (-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0), \overrightarrow{v_2} = (-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1)\}.$$

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est par définition un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}$ de dimension 1. Elle est donc définie par un système linéaire de rang 2 à trois variables :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = 0 \end{cases}$$

les deux équations étant indépendantes. La résolution de ce système permet de trouver une base de $\mathcal{D}$. Pour vérifier que ces deux équations sont bien indépendantes, plusieurs approches sont à notre disposition. La plus simple est de résoudre ce système, La solution doit s'écrire qu'avec un seul paramètre. La deuxième, plus sophistiquée mais plus facile à généraliser consiste à regarder tous les déterminants d'ordre 2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

du système, à savoir

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}, \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}, \\ \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{3,1}, \end{cases}$$

et le rang du système est égal à 2 si l'un de ces déterminants est non nul. Supposons par exemple que ce soit le premier, soit $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$. La résolution du système donne alors

$$x_1 = -\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}x_3, \ x_2 = -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}x_3$$

et tout vecteur de $\mathcal{D}$ s'écrit

$$\left(-\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, 1\right) x_3.$$

Une base de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\left\{(-\frac{a_{1,3}a_{2,2} - a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, -\frac{a_{1,3}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, 1)\right\}.$$

Remarque. La donnée d'une base d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ permet inversement de retrouver l'équation linéaire de ce plan. Il est bon de noter que cette équation n'est pas unique : si $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ est une équation définissant le plan, alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \lambda a_3x_3 = 0$ est également une équation linéaire définissant ce plan. Il en est de même pour une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. La donnée d'une base, constituée d'un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ permet de retrouver le système de rang 2 définissant cette droite. Là aussi les équations formant le système ne sont pas unique, tout système équivalent est également un système linéaire définissant cette droite.

2.2 Projection sur un sous-espace

2.2.1 Projection le long d'un complémentaire

Soit F_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Choisissons un sous-espace complémentaire F_2 (celui ci n'est évidemment pas unique, on en choisit un). Nous avons donc

$$\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2.$$

Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$$

avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1$ et $\overrightarrow{X_2} \in F_2$.

Définition 10 *Le vecteur $\overrightarrow{X_1} \in F_1$ est appelé le projeté du vecteur $\overrightarrow{X}$ sur le sous-espace F_1 le long du complémentaire F_2.*

Il est clair que ce vecteur F_1 dépend du choix de F_2.

2.2.2 Exemple : Projection d'un vecteur dur un plan

Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ un plan vectoriel $\mathcal{P}$ d'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Supposons que les vecteurs $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}\}$ forment une base de $\mathcal{P}$. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver un vecteur $\overrightarrow{U_3}$ tel que $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}\overrightarrow{U_3},\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ayant pour base $\overrightarrow{U_3}$. Ce sous-espace vectoriel est donc de dimension 1, c'est une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Il admet une décomposition unique dans la base $\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}\overrightarrow{U_3},\}$:

$$\overrightarrow{X} = x'_1\overrightarrow{U_1} + x'_2\overrightarrow{U_2} + x'_3\overrightarrow{U_3}$$

et nous avons

$$\overrightarrow{X_1} = x'_1\overrightarrow{U_1} + x'_2\overrightarrow{U_2} \in \mathcal{P}, \overrightarrow{X_2} = x'_3\overrightarrow{U_3} \in \mathcal{D}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{X_1}$ est le projeté du vecteur $\overrightarrow{X}$ sur le plan $\mathcal{P}$ le long de la droite $\mathcal{D}$.

2.2.3 L'application linéaire projection

Revenons au cas général : $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$ la décomposition de $\overrightarrow{X}$ associée. Par définition $\overrightarrow{X_1}$ est de projeté de $\overrightarrow{X}$ sur F_1 le long de F_2. Considérons l'application

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

donnée par

$$p(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X_1}.$$

Cette application est bien linéaire. Elle vérifie l'identité

$$p \circ p = p.$$

En effet si $\overrightarrow{X} \in F_1$ sa décomposition s'écrit $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0}$ et dans ce cas $p(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}$. Nous avons donc

$$\mathrm{Im}(p) = F_1, \ \ker(p) = F_2.$$

Définition 11 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, une projection est une application linéaire $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant l'identité*

$$p \circ p = p.$$

Une telle application définit donc une projection sur le sous-espace vectoriel $F_1 = \mathrm{Im}(p)$ le long du sous-espace $F_2 = \ker(p)$.

Remarque sur la matrice de l'application linéaire p

Considérons dans $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus F_2$ la projection sur F_1 le long de F_2. Soit p l'application linéaire projection associée. Nous avons

$$F_1 = \mathrm{Im}(p), \;\; F_2 = \ker(p)$$

et pour tout vecteur $\overrightarrow{X_1} \in F_1$, $p(\overrightarrow{X_1}) = \overrightarrow{X_1}$ (la restriction de p à F_1 est l'application identité. Supposons que $\dim F_1 = m$ et considérons une base de $\mathbb{R}^n$ (ce n'est certainement pas la base canonique) :

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{U_1}, \cdots, \overrightarrow{U_m}, \overrightarrow{U_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{U_n}\}$$

telle que $\{\overrightarrow{U_1}, \cdots, \overrightarrow{U_m}\}$ soit une base de F_1 (et donc $\{\overrightarrow{U_{m+1}}, \cdots, \overrightarrow{U_n}\}$ est une base de F_2). La matrice de p relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons donc sur cet exemple que le choix de la base pour écrire la matrice d'une application linéaire est important : la matrice de p dans la base canonique est surement beaucoup plus compliquée.

Chapitre 3

L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$

Afin de pouvoir parler de longueur de vecteurs, d'angles de deux vecteurs, nous devons introduire une nouvel outil de mesure, à savoir le produit scalaire.

3.1 Le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Définition

Définition 12 *On appelle produit scalaire euclidien dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \cdots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Cette application a les propriétés suivantes : Pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \in \mathbb{R}^n$,

1. $(\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2}) \cdot \overrightarrow{Y} = \alpha_1 (\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{Y}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X_2} \cdot \overrightarrow{Y})$,
2. $\overrightarrow{X} \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{Y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{Y_2}) = \alpha_1 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_2})$

Une telle application, a deux variables de $\mathbb{R}^n$, vérifiant les deux propriétés ci-dessus est appelée une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. L'étude générale de telles applications sur un espace vectoriel réel ou complexe seront étudiées au second semestre.

Quelques propriétés du produit scalaire euclidien

1. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'identité
$$\forall \overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^n, \ \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$
implique $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
Démonstration. En effet, posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$. Prenons dans un premier temps $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} = (1, 0, \cdots, 0)$. Alors $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{e_1} = 0$ implique $x_1 = 0$. De même, en prenant $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_i}$, nous obtenons $x_i = 0$ et en déduisons $\overrightarrow{X} = 0$.

2. Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$ non nul
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} > 0.$$
En effet $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.
3. Le produit scalaire est commutatif :
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{X}.$$

Lorsque nous considèrerons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire euclidien, nous parlerons alors de $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel euclidien.

Définition 13 *Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, on appelle norme du vecteur $\overrightarrow{X}$, le scalaire*
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}}.$$

Nous avons donc, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ceci montre que la norme d'un vecteur est bien définie. Nous avons aussi
$$||\overrightarrow{0}|| = 0.$$

L'interprétation géométrique de cette fonction norme, qui est bien une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles mais bien entendu non linéaire, est d'associer à tout vecteur, sa longueur.

Proposition 13 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$, nous avons*
$$|\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}| \leq ||\overrightarrow{X}|| ||\overrightarrow{Y}||.$$

Démonstration. En effet, si nous posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$, alors
$$(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 = \sum_i x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i y_i x_j y_j.$$

De même
$$(||\overrightarrow{X}|| ||\overrightarrow{Y}||)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \sum_{i,j} x_i^2 y_j^2.$$

On en déduit
$$(||\overrightarrow{X}|| ||\overrightarrow{Y}||)^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'en déduit.

Proposition 14 *(Inégalité de Minkowski.) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$, nous avons*
$$||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}|| \leq ||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||.$$

Démonstration. En effet, si nous posons $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$, alors

$$(||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + 2\sqrt{\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2}.$$

De même

$$(||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 = \sum_i (x_i + y_i)^2 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i).$$

Ainsi

$$(||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2 - (||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 = 2\sqrt{\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2} - 2\sum_i x_i y_i.$$

Nous en déduisons que

$$(||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}||)^2 \leq (||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||)^2$$

Nous remarquons que l'égalité pour ces deux relations n'a lieu que lorsque $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont liés.

3.1.2 Bases orthonormées

Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les vecteurs de cette base vérifient

1. $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_i} = 1$,
2. $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$ dès que $i \neq j$.

La représentation habituelle de repère canonique dans la plan ou dans l'espace conduit à la définition naturelle de l'orthogonalité de deux vecteurs, orthogonalité qui est "vérifiée" par la représentation de la base canonique :

Définition 14 *Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ de $\mathbb{R}^n$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul :*

$$\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2} = 0.$$

Ainsi les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux et sont de longueur 1. Nous dirons qu'une telle base est un repère orthonormé. D'une manière générale,

Définition 15 *Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Nous dirons qu'elle forme un repère orthonormé si les vecteurs de cette base vérifient*

1. *pour tout $i = 1, \cdots, n$, $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = 1$*
2. *pour tout $i \neq j$, $\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = 0$.*

3.1.3 Deuxième définition du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$

Commençons par interpréter le produit scalaire dans le plan, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs du plan vectoriel

$$\overrightarrow{X_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2}, \; \overrightarrow{X_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}.$$

Nous avons

$$\left| \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\| \left\|\overrightarrow{X_2}\right\|} \right| \leq 1.$$

En effet $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1 + y_1)^2(x_2 + y_2)^2$. Nous pouvons donc interpréter ce nombre comme le cosinus d'un angle, mais ceci nécessite que l'angle formé par les deux vecteurs de base soit un angle droit.

Ainsi, par définition

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{||\overrightarrow{X_1}||\ ||\overrightarrow{X_2}||}$$

et θ désigne l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ du plan.

Théorème 4 *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = ||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Y}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

où $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ désigne l'angle des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$.

Ainsi, comme dans l'exemple ci-dessus, une représentation cartésienne d'un repère orthonormé est donnée par des vecteurs de longueur 1 et deux à deux perpendiculaires.

3.2 Les isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Définition

Nous nous proposons d'étudier ici les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui laissent "invariant" le produit scalaire. Rappelons tout d'abord qu'un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel E et une application linéaire de E à valeurs dans ce même espace.

Définition 16 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est une isométrie linéaire si pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}.$$

Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base canonique. Si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, \cdots, e_n)$, alors

$$f(\overrightarrow{X}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}),\ f(\overrightarrow{Y}) = y_1 f(\overrightarrow{e_1}) + y_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + y_n f(\overrightarrow{e_n})$$

et

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \sum_{i,j} x_i y_j f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}).$$

Si f est une isométrie

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \sum_i x_i y_i.$$

Nous en déduisons que f est une isométrie si et seulement si

1. $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}) = 0$ si $i \neq j$,
2. $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_i}) = 1$ pour tout $i = 1, ; \cdots, n$.

Dans le chapitre suivant, nous développerons ces identités pour $n = 2$ et $n = 3$.

3.2.2 Propriétés géométriques des isométries

Proposition 15 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. Alors f est une isométrie linéaire si et seulement si pour tout $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$,*

$$||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||.$$

Autrement dit une isométrie conserve les longueurs.

Démonstration. Si f est une isométrie, alors pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}$$

et donc $||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||$. Inversement, supposons que f soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui conserve les longueurs. Nous aurons en particulier, pour tous $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$f(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) \cdot (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}).$$

En développant, nous obtenons

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) + f(\overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) + 2f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Y} + 2\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}.$$

Or par hypothèse, $f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}, f(\overrightarrow{Y}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Y}$. Nous en déduisons

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

ce qui montre que f est une isométrie.

Proposition 16 *Les isométries conservent les angles.*

Démonstration. Soient f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = ||f(\overrightarrow{X})|| ||f(\overrightarrow{Y})|| \cos(f(\overrightarrow{X}), f(\overrightarrow{Y})) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}).$$

Comme f est une isométrie, $||f(\overrightarrow{X})|| = ||\overrightarrow{X}||, |f(\overrightarrow{Y})|| = ||\overrightarrow{Y}||$. Ainsi

$$\cos(f(\overrightarrow{X}), f(\overrightarrow{Y})) = \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

d'où la proposition.

3.3 Bases orthonormales. Le procédé de Gram-Schmidt

3.3.1 Bases orthonornales

Nous avons vu que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est orthonormale, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = 0$$

dès que $i \neq j$. Cette base est même orthonormée, chacun des vecteurs de base est de longueur 1. Bien entendu ce n'est pas l'unique base de $\mathbb{R}^n$ qui soit orthonormale.

Définition 17 *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Une base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de F est dite orthonormale si pour tout i, j :*

$$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = 0.$$

Remarquons que si la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ était une famille génératrice de F, elle en serait une base. En effet

Théorème 5 *Toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux est libre.*

Démonstration.

3.3.2 Un procédé d'orthogonalisation

Théorème 6 *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors F admet une base orthonormale.*

Démonstration. La démonstration qui suit donne le principe de construction d'une telle base orthonormale à partir d'une base de F donnée. Soit donc $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2},, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ une base de F. Considérons les p vecteurs $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2},, \cdots, \overrightarrow{w_p}\}$ définis de proche en proche par les relations

$$\begin{array}{ll}
\overrightarrow{w_1} & = \overrightarrow{v_1} \\
\overrightarrow{w_2} & = a_{2,1}\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2} \\
\overrightarrow{w_3} & = a_{3,1}\overrightarrow{w_1} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{v_3} \\
\cdots & \cdots \\
\overrightarrow{w_{p-1}} & = a_{p-1,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p-2,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p-1,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + \overrightarrow{v_{p-1}} \\
\overrightarrow{w_p} & = a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p}
\end{array}$$

Il est clair que ces vecteurs sont encore linéairement indépendants et forment donc une nouvelle base de F. Montrons que l'on peut choisir les coefficientts $a_{i,j}$ de manière à ce que ces vecteurs soient orthogonaux deux à deux. La méthode est simple : On commence par déterminer $a_{2,1}$ pour que $\overrightarrow{w_2}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$. Une fois ce coefficient choisi, on détermine $a_{3,1}$ et $a_{3,2}$ pour que $\overrightarrow{w_3}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$. On procède ainsi jusqu'au rang p.

1. Ecrivons que $\overrightarrow{w_2}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$:

$$\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{w_1} = a_{2,1}\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_1} = 0$$

ce qui donne

$$a_{2,1} = -\frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{w_1}}{\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_1}}.$$

En remplaçant dans l'expression de $\overrightarrow{w_2}$ la valeur trouvée de $a_{2,1}$, nous en déduisons $\overrightarrow{w_2}$ orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$. Dans tout le reste du processus, nous considérons ce vecteur $\overrightarrow{w_2}$ ainsi déterminé.

2. Ecrivons que $\overrightarrow{w_3}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$ et à $\overrightarrow{w_1}$:

$$\begin{array}{c}
a_{3,1}\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_1} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_1} = 0 \\
a_{3,1}\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{w_2} + a_{3,2}\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{w_1} = 0
\end{array}$$

En résolvant ce système linéaire à deux équations et deux inconnues, nous trouvons les valeurs de $a_{3,1}$ et $a_{3,2}$ que nous remplaçons dans l'expression de $\overrightarrow{w_3}$.

3. Ainsi de suite jusqu'à la détermination du vecteur $\overrightarrow{w_p}$. Nous déterminons les coefficients $a_{p,1}, \cdots, a_{p,p-1}$ en résolvantt le système

$$\begin{array}{l}
(a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p}) \cdot \overrightarrow{w_1} = 0 \\
(a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p}) \cdot \overrightarrow{w_2} = 0 \\
\cdots \\
(a_{p,1}\overrightarrow{w_1} + a_{p,2}\overrightarrow{w_2} + \cdots + a_{p,p-2}\overrightarrow{w_{p-2}} + a_{p,p-1}\overrightarrow{w_{p-1}} + \overrightarrow{v_p}) \cdot \overrightarrow{w_p - 1} = 0
\end{array}$$

La base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \cdots, w_{p-2}, \overrightarrow{w_{p-1}}, \overrightarrow{w_p}\}$ ainsi trouvée est orthonormale. Si nous voulons une base orthonormée, on considère alors les vecteurs

$$\overrightarrow{w_i'} = \frac{\overrightarrow{w_i}}{||\overrightarrow{w_i}||}.$$

Remarque. Le procédé d'orthogonalisation d'une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ reste bien entendu valable pour l'espace $\mathbb{R}^n$. A partir d'une base quelconque non orthonormale de $\mathbb{R}^n$, nous en déduisons une base orthonormale et donc orthonormée . Rappelons que la base canonique est déjà orthonormée. Les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthormée, en particulier de la base canonique à une base orthonormée ont une structure particulière. Elles s'appellent matrices orthogonales. Nous les étudierons en fin de chapitre.

3.4 Projections orthogonales

3.4.1 Complément orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Définition 18 *On dit qu'un sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal à F si, pour tout $\overrightarrow{X} \in F$ et $\overrightarrow{Y} \in F_2$,*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0.$$

En particulier, si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, comme elle est orthonormée, toute droite vectorielle engendrée par l'un des vecteurs
$overrightarrowe_i$ est orthogonale à toute droite vectorielle engendrée par un vecteur $\overrightarrow{e_j}$ dès que $i \neq j$.

Théorème 7 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique sous-espace vectoriel, noté $F^\perp$, orthogonal à F tel que*

$$F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n.$$

De plus $\dim F^\perp = n - p.$‘

Démonstration. Considérons l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F. Cet ensemble est non vide car il contient le vecteur nul. Si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à F et si a et b sont deux scalaires, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{Z}$ de F, nous avons

$$(a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z} = a(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}) + b(\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z}) = 0.$$

Ainsi $a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y}$ est encore orthogonal et donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Notons le $F^\perp$. Il vérifie en particulier

$$F \cap F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}.$$

En effet, si $\overrightarrow{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est un vecteur de cette intersection, il est orthogonal à lui-même, c'est-à-dire vérifie

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

ce qui implique $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ et par conséquent $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$. Ainsi $F \cap F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$. Il nous reste à montrer que les sous-espaces F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Comme déjà leur intersection est réduite au vecteur nul, il suffit de montrer que $\dim F + \dim F^\perp = n$ soit $\dim F^\perp = n - p$. Nous savons que F admet une base orthonormale. Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ une telle base. Complétons cette base en une base de $\mathbb{R}^n$: $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{v_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt transforme cette base en une base orthonormale mais en laissant invariants les p premiers vecteurs car ils sont déjà orthogonaux deux à deux et le procédé opère sur le premier vecteur, puis le deuxième, etc. Soit $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$ cette base. Considérons le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs $\{\overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$. Il est orthogonal à F donc contenu dans $F^\perp$, de dimension $n - p$. Dans cette base, tout vecteur orthogonal à F est une combinaison linéaire des vecteurs $\{\overrightarrow{w_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{w_n}\}$. Ainsi cet espace coïncide avec $F^\perp$ d'où $\dim F^\perp = n - p$. On en déduit que F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

3.4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de projection d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace vectoriel F_1 le long d'un supplémentaire F_2. Nous reprenons ici cette définition mais en considérant comme supplémentaire l'orthogonal de F_1.

Définition 19 *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $F^\perp$ son supplémentaire orthogonal. On appelle projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$ sur F, la projection de $\overrightarrow{X}$ sur F le long de $F^\perp$.*

Ainsi, comme $F \oplus F^\perp = \mathbb{F}^n$, le vecteur $\overrightarrow{X}$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}$$

avec $\overrightarrow{X}_F \in F$ et $\overrightarrow{X}_{F^\perp} \in F^\perp$. La projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur F est le vecteur $\overrightarrow{X}_F$. Nous la noterons p_F :

$$p_F(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_F.$$

Nous pouvons également définir la projection orthogonale de $\overrightarrow{X}$ sur $F^\perp$:

$$p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_{F^\perp}$$

ce qui nous donne

$$\overrightarrow{X} = p_F(\overrightarrow{X}) + p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}).$$

Théorème 8 *(Théorème de Pythagore) Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^n$*

$$||\overrightarrow{X}||^2 = ||\overrightarrow{X}_F||^2 + ||\overrightarrow{X}_{F^\perp}||^2.$$

Démonstration. En effet, comme $\overrightarrow{X} = p_F(\overrightarrow{X}) + p_{F^\perp}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}$ et $\overrightarrow{X}_F \cdot \overrightarrow{X}_{F^\perp} = 0$, alors

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = (\overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}) \cdot (\overrightarrow{X}_F + \overrightarrow{X}_{F^\perp}) = (\overrightarrow{X}_F \cdot \overrightarrow{X}_F) + (\overrightarrow{X}_{F^\perp} \cdot \overrightarrow{X}_{F^\perp}).$$

D'où le théorème.

Calcul pratique de $\overrightarrow{X}_F$. Considérons une base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de F. Alors

$$\overrightarrow{X}_F = (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_p})\overrightarrow{v_p}.$$

Remarque : distance d'un point à un sous-espace vectoriel. La notion de point n'existe pas dans le cadre des espaces vectoriels euclidiens ou pas. Les éléments sont des vecteurs. Pour pouvoir parler de points, il faut munir l'ensemble $\mathbb{R}^n$ d'une autre structure dont les éléments seront les points. On parle alors de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Qu'est-ce qu'un espace affine ? Cette notion sera définie dans le cours de géométrie de troisième année. Nous allons toutefois nous passer de cette définition générale et la particulariser au cas de $\mathbb{R}^n$. Les éléments de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ sont appelés les points, que l'on notera par une majuscule telle que M, un de ces points joue un rôle particulier, nous choisirons comme point particulier, appelé origine le point O de coordonnées $(0, 0, \cdots, 0)$ et il existe une bijection naturelle

$$\varphi_O : \mathbb{R}^n(affine) \to \mathbb{R}^n(vectoriel)$$

donnée par

$$\varphi_O(M) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{X}$$

où les composantes du vecteur $\overrightarrow{X}$ sont les coordonnées de M. Nous pouvons alors établir la définition suivante

Définition 20 *Soit $M = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un point de l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On appelle distance de M à F*

$$d(M, F) = ||\overrightarrow{X}_{F^\perp}||$$

où $\overrightarrow{X}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ associé au point M.

Nous étudierons plus en détail cette notion dans le cadre de la dimension 2 et 3.

3.5 Symétrie orthogonale

3.5.1 Hyperplan

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on appelle hyperplan vectoriel tout sous-espace vectoriel de dimension n (on dit aussi de codimension 1). Ainsi un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire (c'est-à-dire d'une application linéaire à valeurs dans le corps $\mathbb{R}$ des scalaires). Il est donc défini par une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

l'un au moins des coefficients a_i étant non nul. Par exemple, un hyperplan dans $\mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel de dimension 2, un hyperplan dans $\mathbb{R}^2$ est une droite vectorielle de dimension 1.

3.5.2 Symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan vectoriel défini par l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Son espace orthogonal $\mathcal{H}^\perp$ est donc de dimension 1, c'est une droite vectorielle. Comme

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$$

tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} + \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}$$

avec $\overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}$ et $\overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp} \in \mathcal{H}^\perp$.

Définition 21 *Soit $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} + \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle symétrique orthogonal de $\overrightarrow{X}$ par rapport à l'hyperplan $\mathcal{H}$ le vecteur $\overrightarrow{Y}$ défini par*

$$\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} - \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}.$$

Nous noterons $s_{\mathcal{H}}$ l'application

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}} - \overrightarrow{X}_{\mathcal{H}^\perp}.$$

Cette application est linéaire et nous l'appellerons la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{H}$. Elle vérifie

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) \circ s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{X}) = Id.$$

Une application linéaire qui vérifie une telle relation $f \circ f = Id$ est appelée une involution. Elle est donc bijective et son application inverse est l'application elle même :

$$s_{\mathcal{H}}^{-1} = s_{\mathcal{H}}.$$

Notons également que cette application laisse invariants tous les vecteurs de $\mathcal{H}$.

3.5.3 Matrices d'une symétrie orthogonale

Soit $s_{\mathcal{H}}$ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathcal{H}$. Pour écrire une matrice de cette application linéaire (qui est un endomorphisme et même un isomorphisme c'est-à-dire un endomorphisme bijectif), nous allons choisir une base adaptée à cette géométrie. Considérons donc une base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{v_n}\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_{n-1}}\}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{H}$ et $\{\overrightarrow{v_n}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}^\perp$. La base donnée de $\mathbb{R}^n$ est donc aussi orthonormée. La symétrie vérifie donc

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{v_i} = \ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

et

$$s_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{v_n}) = -\overrightarrow{v_n}.$$

Nous en déduisons que la matrice de $s_{\mathcal{H}}$ relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.6 Matrice d'une isométrie relative à une base orthonormée

3.6.1 Un retour sur la définition d'une isométrie

Rappelons qu'une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Nous avons vu également qu'un isométrie conservait les longueurs et les angles. Nous en avons déduit

Proposition 17 *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\{f(\overrightarrow{v_1}), f(\overrightarrow{v_2}), \cdots, f(\overrightarrow{v_n})\}$$

est aussi une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ étant orthonormée, son image $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ par l'isométrie f sera une base orthonormée. Nous allons nous servir de cette propriété pour écrire une matrice de l'application linéaire f.

3.6.2 Matrice d'une isométrie relative à une base orthonormée

Rappelons que pour écrire une matrice d'un endomorphisme, nous nous donnons au préalable une base de $\mathbb{R}^n$, nous calculons les transformés des vecteurs de cette base que nous écrivons en colonne ce qui nous donne la matrice de taille $n \times n$. Prenons comme base, la base canonique qui est orthonormée. Les transformés des vecteurs de cette base s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\overrightarrow{v_1}) & = a_{1,1}\overrightarrow{e_1} + a_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,1}\overrightarrow{e_n} \\ f(\overrightarrow{v_2}) & = a_{1,2}\overrightarrow{e_1} + a_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,2}\overrightarrow{e_n} \\ \cdots & \\ f(\overrightarrow{v_n}) & = a_{1,n}\overrightarrow{e_1} + a_{2,n}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n,n}\overrightarrow{e_n} \end{array} \right.$$

La metrice correspondante se formant en mettant en colonne les coefficients de ces vecteurs, elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

que nous noterons aussi $A = (a_{i,j}$, le premier indice est celui de la ligne et le deuxième celui de la colonne. Comme chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e_i}$ est de norme 1, les coefficients de chacune des colonnes vérinfies

$$f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_i}) = 1 = a_{1,i}^2 + a_{2,i}^2 + \cdots + a_{n,i}^2.$$

De même les relations $f(\overrightarrow{e_i}) \cdot f(\overrightarrow{e_j}) = 0$ pour $i \neq j$ impliques

$$a_{1,i}a_{1,j} + a_{2,i}a_{2,j} + \cdots + a_{n,i}a_{n,j} = 0.$$

L'écriture matricielle suivante synthétise ces deux relations : soit ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice A, c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de la matrice A en écrivant que la première ligne de ${}^tA$ est la première donne de A, la deuxième ligne de ${}^tA$ la deuxième ligne de A ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

Proposition 18 *Soit A la matrice d'une isométrie relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors elle vérifie*

$$A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = Id_n$$

où Id_n est la matrice identité d'ordre n. Une telle matrice sera appelée orthogonale. Inversement, si A est une matrice orthogonale, alors elle est la matrice relative à la base canonique d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, une symétrie orthogonale est une isométrie, sa matrice dans la base canonique est orthogonale, par contre une projection orthogonale n'en est pas une. Nous allons déterminer dans le chapitre suivant toutes ces applications et matrices dans le cadre de la dimension 2 et 3.

Chapitre 4

Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Nous allons nous intéresser ici à la géométrie vectorielle et euclidienne du plan et de l'espace.

4.1 Le plan euclidien

On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire est

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

et la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est une base orthonormée.

4.1.1 Interprétation géométrique du déterminant

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^2$. La matrice associée à ce couple de vecteurs est la matrice obtenue en mettant en colonne les composantes de ces vecteurs :

$$M(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Par définition, le déterminant de cette matrice est le scalaire

$$\det M = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Nous savons, depuis le cours de première année, que la famille $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le déterminant $\det M$ est non nul. Nous allons retrouver ce résultat dans l'interprétation géométrique de ce déterminant.

Considérons le plan euclidien, sa base canonique, et les deux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ représentés classiquement par le graphe suivant

Considérons le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont supportés par les vecteurs donnés. Son aire est égale à $AB \times CI$. Si $\overrightarrow{Z}$ est le vecteur $\overrightarrow{Z} = (-y_2, y_1)$, alors

$$\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z} = 0, \ \det M = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}.$$

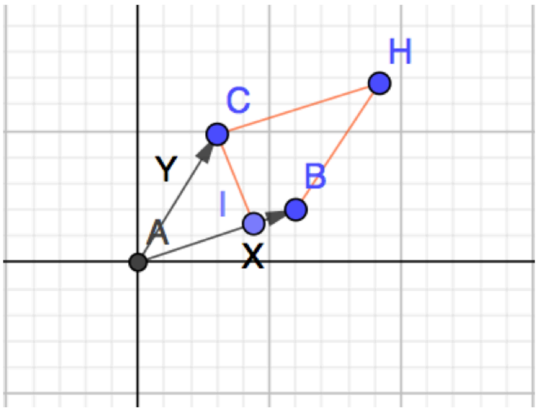

FIGURE 4.1 – Parallelogramme construit sur deux vecteurs.

Mais $\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Z} = ||\overrightarrow{X}||\,||\overrightarrow{Z}||\cos(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Z})$. Comme $\cos(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Z}) = \cos((\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})+\pi/2) = -\sin(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})$, nous obtenons

$$\det M = -||\overrightarrow{X}||\,||\overrightarrow{Y}||\sin(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})$$

et donc

$$|\det M| = AB \times CD \times |\sin(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})| = AB \times CI.$$

Ainsi

Proposition 19 *Le déterminant de deux vecteurs exprimés dans une base orthonormée est égal, en valeur absolue, à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

4.1.2 Projection orthogonale

Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 1. Si $\overrightarrow{v_1} = (a,b)$ en est une base, l'équation linéaire définissant cette droite s'obtient en écrivant que tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$: $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{v_1}$ soit $(x_1,x_2) = \lambda(a,b)$. Ainsi, nous avons "les équations paramétriques "de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a \\ x_2 = \lambda b \end{cases}$$

L'équation linéaire s'obtient en éliminant le paramètre λ entre ces deux équations : Supposons $a \neq 0$. Alors $\lambda = x_1 a^{-1}$ d'où $x_2 = x_1 a^{-1} b$ et donc

$$a^{-1} b x_1 - x_2 = 0$$

ou bien, après multiplication par a

$$b x_1 - a x_2 = 0.$$

Cette équation cartésienne de $\mathcal{D}$ s'interprète donc en disant que tout vecteur $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{D}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$ qui est une base de $^\top$. Si $a = 0$, alors l'équation de $\mathcal{D}$ se résume à $x_1 = 0$. Revenons au cas $a \neq 0$. Ceci étant, d'après le calcul que nous venous de faire, l'équation cartésienne de la doite $\mathcal{D}^\perp$ orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ est

$$a x_1 + b x_2 = 0.$$

Une base est donnée par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2$. Déterminons le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$. Pour cela nous devons calculer les composantes x'_1, x'_2 de $\overrightarrow{X}$ relative à la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

$$\overrightarrow{X} = x'_1 \overrightarrow{v_1} + x'_2 \overrightarrow{v_2} = (a x'_1 + b x'_2)\overrightarrow{e_1} + (b x'_1 - a x'_2) lment_d = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} x_1 = a x'_1 + b x'_2 \\ x_2 = b x'_1 - a x'_2 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{a}{a^2 + b^2} x_1 + \dfrac{b}{a^2 + b^2} x_2 \\ x'_2 = \dfrac{b}{a^2 + b^2} x_1 - \dfrac{a}{a^2 + b^2} x_2. \end{cases}$$

Nous en déduisons que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$, qui est le vecteur $x'_1 \overrightarrow{v_1}$, a pour composante dans la base canonique

$$p_{\mathcal{D}}(x_1, x_2) = (\frac{a}{a^2 + b^2} x_1 + \frac{b}{a^2 + b^2} x_2)(a, b).$$

4.1.3 Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Une isométrie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme vérifiant

$$f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

pour fous $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^2$. En particulier une isométrie transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée, ce qui implique qu'une isométrie est bijective. Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ la base canonique. Elle est orthonormée. Nous en déduisons que la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Posons

$$f(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}, \; f(\overrightarrow{e_2}) = c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}.$$

La matrice de f relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Comme $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée, nous en déduisons le système algébrique

$$\begin{cases} a^2+b^2 & =1 \\ c^2+d^2 & =1 \\ ac+bd & =0. \end{cases}$$

Comme $a^2+b2=1$, nous pouvons poser

$$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta.$$

La troisième relation s'écrit alors $c\cos\theta+d\sin\theta=0$ et de la deuxième relation nous déduisons qu'il existe $\lambda=\pm 1$ tel que

$$c=-\lambda\sin\theta,\ d=\lambda\cos\theta.$$

1. Prenons $\lambda=1$. La matrice de l'isométrie f relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et f est donc une rotation vectorielle (de centre le point O) et d'angle θ.

2. Prenons $\lambda=-1$. La matrice de l'isométrie f relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

et f est donc une symétrie orthogonale d'axe la droite vectorielle $\mathcal{D}$ ayant pour base le vecteur

$$\overrightarrow{v_1}=(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}).$$

Proposition 20 *Toute isométrie (vectorielle) du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est soit une rotation de centre O, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.*

4.2 La géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^3$

4.2.1 Vecteur directeur d'un plan, produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Nous pouvons toujours ramener la définition d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ comme le sous-espace vectoriel constitué des éléments $\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation linéaire

$$ax_1+bx_2=cx_3=0.$$

Cette équation n'est unique qu'à un coefficient multiplicatif près. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A}=(a,b,c)$ défini par cette équation. Alors l'équation linéaire n'est rien d'autre que

$$\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{A}=0.$$

Les éléments du plan vectoriel apparaîssent comme les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{A}$. Ce vecteur $\overrightarrow{A}$ s'appelle un vecteur directeur du plan, tout autre vecteur directeur s'écrit $\lambda\overrightarrow{A}$ avec $\lambda\neq 0$.

Détermination d'un vecteur directeur : le produit vectoriel Supposons que nous connaissions une base $\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,x_3),\overrightarrow{Y}=(y_1,y_2,y_3)\}$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Un vecteur directeur est orthogonal à $\overrightarrow{X}$ et à

$\overrightarrow{Y}$. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A}$ de composante $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. On vérifie aisément que

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0, \ \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Vérifions uniquement la première identité :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = 0.$$

Ainsi ce vecteur $\overrightarrow{A}$ est un vecteur directeur du plan de base $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$.

Définition 22 *Soient $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est le vecteur de composantes*

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nous avons démontré ci-dessus la propriété suivante

Proposition 21 *Si les vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ sont linéairement indépendants, alors $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est orthogonal au plan engendré par c$\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. C'est dons un vecteur directeur de ce plan.*

Nous en déduisons aussi

Corollaire 2 *Les deux vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} \neq \overrightarrow{0}$.*

Démonstration. En effet, si $\overrightarrow{Y} = \lambda\overrightarrow{X}$, alors si nous calculons $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ nous trouvons bien le vecteur nul.

Lemme 1 *Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$, on a*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot Y)^2.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{array}{ll} ||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 & = ((x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ & = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2(\overrightarrow{X} \cdot Y)^2 & \end{array}$$

Nous en déduisons

$$\frac{||\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} + \frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1.$$

Or

$$\frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = \cos^2\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$. Ainsi

$$\frac{||\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

On en déduit

Proposition 22 *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. alors*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}|| = ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}|| \sin\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$.

Sur la base canonique, le produit vectoriel se comporte ainsi :

$$\begin{array}{lll}
\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}, \\
\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}, \\
\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}.
\end{array}$$

Nous en déduisons les propriétés algébriques du produit vectoriel : pour tout $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in \mathbb{R}^3$

1. $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = -\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{X}$,
2. $\overrightarrow{X} \wedge (a\overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{Z}) = a\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Z}$,
3. $(\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \wedge \overrightarrow{Z} + (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \wedge \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \wedge \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{0}$.

La dernière identité montre que le produit vectoriel n'est pas une opération associative.

4.2.2 Le déterminant et le produit vectoriel

Rappelons que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

son determinant se calcule, par exemple, à l'aide de la règle de Sarrus

$$\begin{aligned} \det A = \; & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} \\ & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \end{aligned}$$

et nous savons que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de la matrice A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{1,1} & -A_{2,1} & A_{3,1} \\ -A_{1,2} & A_{2,2} & -A_{3,2} \\ A_{1,3} & -A_{2,3} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

(attention à l'ordre des indices) où $A_{i,j}$ est le dineur du coefficients $a_{i,j}$ obtenu en considérant la sous-matrice d'ordre 2 de A obtenue en enlevant la ligne et la colonne contenant $a_{i,j}$ puis en calculant le déterminant de cette matrice d'ordre 2. Nous allons donner, comme dans le paragraphe précédent, une interprétation géométrique de ce déterminant.

Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \;\; \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3), \;\; \overrightarrow{Z} = (z_1, z_2, z_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ces trois vecteurs est obtenue en mettant en colonne les composantes de ces trois vecteurs :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 23 *Le déterminant de la matrice des trois vecteurs* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\overrightarrow{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ *ne dépend pas de la base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *choisie et est égal, en valeur absolue, au volume du parallélépipède supporté par ces trois vecteurs.*

Démonstration. Considérons une deuxième base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base correspond, par définition, à la matrice des trois vecteurs formant cette nouvelle base. Or nous avons vu qu'une telle matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est une matrice orthogonale, c'est-à-dire, si nous notons par P cette matrice, elle vérifie

$$P^{-1} =^t P.$$

Exprimons les trois vecteurs donnés $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ dans la nouvelle base :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{X} = x'_1\overrightarrow{v_1} + x'_2\overrightarrow{v_2} + x'_3\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{Y} = y'_1\overrightarrow{v_1} + y'_2\overrightarrow{v_2} + y'_3\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{Z} = z'_1\overrightarrow{v_1} + z'_2\overrightarrow{v_2} + z'_3\overrightarrow{v_3} \end{array} \right.$$

Ainsi la matrice M' de ces trois vecteurs exprimés dans la nouvelle base est

$$M' = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{pmatrix}.$$

Le lien entre les matrices M et M' est donné dans la relation fondamentale, vue en première année mais que nous reprendrons au dernier chapitre :

$$M' = P^{-1}MP.$$

Comme le determinant d'un produit de deux matrices carrées d'ordre n est le produit des déterminants (ce qui est faux pour la somme), nous en déduisons :

$$\det M' = \det P^{-1} \det M \det P.$$

Or $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$, et ceci implique

$$\det M' = \det M.$$

Notons que pour obtenir cette relation, nous n'avons pas utilisé le fait que la mouvelle base soit orthonormée. L'importance de cette hypothèse va apparaître dans ce qui suit. Le déterminant de M est

$$\det M = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + x_2y_3z_1 - z_2y_2x_3 - z_3y_3x_1 - y_1x_2z_3.$$

Nous pouvons l'écure comme un produit scalaire :

$$\det M = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_3).$$

Rappelons que

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3).$$

Alors

$$\det M = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

Notons que pour les mêmes raisons, nous aurons aussi

$$\det M = (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \cdot \overrightarrow{Y} = (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \cdot \overrightarrow{X}.$$

On prêtera attention à l'ordre d'écriture des vecteurs.

Comparons ce produit scalaire avec l'aire du parallélépipède supporté par les trois vecteurs donnés, que nous supposons indépendants, sinon le parallélépipède serait un peu plat. Rappelons que le volume est égal au produit d'une base par la hauteur issue de cette base. Commençons par calculer l'aire de la base définie par les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. Ces deux vecteurs déterminent un plan $\mathcal{P}$. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, nous en déduisons que les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y} - \frac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X}||^2}\overrightarrow{X}$ forment une base orthogonale de $\mathcal{P}$. Considérons donc la base orthonormée $\{\frac{\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{X}||}, \frac{\overrightarrow{Y_1}}{||\overrightarrow{Y_1}||}$.Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ relatives à cette base sont respectivement $(||\overrightarrow{X}||, 0)$ et $(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}, ||Y_1||)$. D'après le paragraphe précédent, l'aire du parallélogramme définie par les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{X}|| & \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} \\ 0 & ||\overrightarrow{Y_1}|| \end{pmatrix}$$

et donc égale à $||\overrightarrow{X}||.||\overrightarrow{Y_1}||$ et $||\overrightarrow{Y_1}||^2 = ||\overrightarrow{Y}||^2 - 2\frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2} + \frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2} = ||\overrightarrow{Y}||^2 + \frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2}$. Si $\mathcal{A}$ désigne l'aire de ce parallélogramme, alors

$$\mathcal{A}^2 = ||\overrightarrow{X}||^2 \; ||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2.$$

La hauteur issue de cette base correspond en valeur absolue au produit scalaire de $\overrightarrow{Z}$ avec le vecteur unitaire orthogonal au plan. Si nous notons par h cette hauteur, nous avons donc

$$h^2 = \left(\frac{\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||} \cdot \overrightarrow{Z} \right)^2$$

ce qui donne comme volume du parallélépipède :

$$\mathcal{V}^2 = \left(||\overrightarrow{X}||^2 \; ||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 \right) \left(\frac{\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||} \cdot \overrightarrow{Z} \right)^2$$

et comme $||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2 ||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot Y)^2$, nous obtenons

$$\mathcal{V}^2 = ((\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z})^2 = (\det M)^2$$

d'où la proposition.

4.2.3 Le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$

Définition 23 *On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$, le nombre*

$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}).$$

L'expression analytique de ce produit mixte est

$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

On en déduit immédiatement
$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

De plus, d'après les résultats du paragraphe précédent, le produit mxte est égal au déterminant de la mateice des trois vecteurs $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$. Il est donc égal en valeur absolue au volume du parallélépipède supporté par les trois vecteurs.

4.3 Les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Rappelons qu'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme vérifiant
$$f(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$
pout tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$. Un tel endomorphisme est bijectif et sa matrice relative à une base orthonormée est orthogonale,c'est-à-dire vérifie
$$A^{-1} = {}^t A.$$
En particulier, le déterminant de A vaut 1 ou -1.

Nous dirons que l'isométrie est *directe* si $\det A = 1$. Sinon nous dirons qu'elle est *indirecte*. Notons que ces définitions ne dépendent pas de la base orthonormée choisie, car si A' est la matrice de la même isométrie mais relative à une autre base orthonormée, alors
$$A' = P^{-1}AP$$
où P est la matrice de changement de bases et donc
$$\det A' = \det P^{-1} \det A \det P = \det A.$$

Le but de ce paragraphe est de déterminer la nature de ces transformations de l'espace. Nous avons vu dans les chapitres précédents, que les symétrie par rapport à un plan étaient des isométries. Est-ce que il en existe d'une autre nature ? En dimension 2, nous avons caractérisé toutes les isométries par un calcul algébrique. En dimension 3, nous ne pouvons pas trop compter sur une telle approche. En effet si
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
est une matrice orthogonale, la relation ${}^tAA = Id$ est équivalente au système algébrique
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \end{array} \right.$$
et nous sommes bien démunis pour résoudre de tels systèmes algébriques. Nous allons donc utiliser une toute autre approche plus liée au calcul matriciel : l'idée est de caractériser une isométrie en déterminant une base orthonormée "‘adaptée"’ à cette isométrie dans laquelle la matrice s'exprimera simplement. Nous l'avons vu pour une symétrie par rapport à un hyperplan, en utilisant une base orthonormée qui est obtenue

en complétant une base de l'hyperplan, la matrice de l'isométrie n'avait que des éléments (des 1 et des -1) sur sa diagonale. C'est cette approche que nous allons utilser. Pour commencer, nous allons regarder s'il existe des sous-espaces invariants :

Définition 24 *Un sous-espace vectoriel propre F de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une droite (dimension 1) ou un plan (dimension 2) est dit invariant par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ si $f(F) \subset F$, autrement dit si*

$$\forall \overrightarrow{X} n F,\ f(\overrightarrow{X}) \in F.$$

Supposons à présent que f soit une isométrie de R^3. Soit F un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$. Son orthogonal lui est supplémentaire :

$$F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3.$$

Proposition 24 *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Si F est un sous-espace propre invariant par F, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi invariant par f.*

Démonstration. Nous devons montrer que pour tout $\overrightarrow{Y} \in F^{\perp}$, le vecteur $f(\overrightarrow{Y})$ est aussi un vecteur de $F^{\perp}$. Soit donc un vecteur quelconque $\overrightarrow{Z} \in F$ et montrons que $\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = 0$. Comme l'isométrie f est bijective et comme F est invariant par f, la restriction de f à F est un isomorphisme de F. II existe donc un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ tel que $\overrightarrow{Z} = f(\overrightarrow{X})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$

car $\overrightarrow{X} \in F$ et $\overrightarrow{Y} \in F^{\perp}$. Ainsi $\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = 0$ pour tout vecteur de F et donc $f(\overrightarrow{Y}) \in F^{\perp}$.

Lemme 2 *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe un sous-espace de dimension 1 invariant pour g.*

Démonstration. En fait ce résultat, ici intermédiaire, sera généralisé et commenté dans le chapitre suivant concernant l'étude des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1 et soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur non nul de F. Si F est un sous-espace invariant, comme il est de dimension 1, alors il existe $\lambda \in /R$ tel que

$$f(\overrightarrow{X}) = \lambda \overrightarrow{X}.$$

Cette équation s'écrit aussi $f(\overrightarrow{X}) - \lambda \overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ ou encore

$$(f - \lambda Id)(\overrightarrow{X}) = 0$$

où Id désigne l'application identique de $\mathbb{R}^3$. Nous en déduisons que $\overrightarrow{X}$ est un vecteur du noyau de l'application linéaire $f - \lambda Id$. Comme $/XX$ est supposé non nul par hypothèse, ce noyau n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. L'application f n'est donc pas injective, elle n'est donc pas bijective. Or nous savons qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel est bijectif si et seulement si le déterminant de n'importe quelle matrice de cet endomorphisme est nul. Ainsi

$$\det(f - \lambda Id) = 0.$$

Calculons ce déterminant. Supposont que la matrice de f dans la base canonique (ou une autre) soit

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M-\lambda Id=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-\lambda&b_1&c_1\\a_2&b_2-\lambda&c_2\\a_3&b_3&c_3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl}\det(M-\lambda Id)&=&(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)(c_3-\lambda)+b_1c_2a_3+a_2b_3c_2\\&&-c_1a_3(b_2-\lambda)-b_1a_2(c_3-\lambda)-c_2b_3(a_1-\lambda)\\&=&-\lambda^3+\lambda^2(a_1+b_2+c_3)-\lambda((b_2c_3-c_2b_3)+(a_1c_3-a_3c_1)+(a_1b_2-a_2b_1))+\det M.\end{array}$$

Ainsi l'équation $\det(M-\lambda Id)=0$ est une équation polynomiale de degré 3 et toute équation polynomiale de degré impair a toujours une racine. Ainsi il existe toujours $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que l'ensomorphisme $f-\lambda Id)$ ait un noyau non nul. D'où le lemme.

Proposition 25 *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Il existe une droite vectorielle $\mathcal{D}$ invariante par f et si $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$, alors $\mathcal{P}$ est aussi invariant par f.*

En conséquence, si $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{\overrightarrow{v_1}\}$ soit une base de $\mathcal{D}$ et $\{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ une base de $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$, alors la matrice de f relative à cette base, comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont invariants par f, est de la forme

$$M_1=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&u_1&u_2\\0&u_3&u_4\end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant orthogonale, nous en déduisons que $\lambda=\pm1$ et que la matrice

$$\begin{pmatrix}u_1&u_2\\u_3&u_4\end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 9 *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

ou de la forme

$$\begin{pmatrix}\pm1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Quelles sont les transformations associées à ces matrices ? Soit $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ la base orthonormée dans laquelle la matrice M de l'isométrie f est l'une des matrices ci-dessus. Notons par $\mathcal{D}$ la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v_1}$ et par $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de base $\{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ qui est l'orthogonal de $\mathcal{D}$: $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$.

1. Considérons le cas où M est la matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 1, c'est une isométrie directe et cette isométrie est une rotation. La droite vectorielle $\mathcal{D}$ de base $\overrightarrow{v_1}$ est invariante, de plus la restriction de l'isométrie sur cette droite est l'identité. Le plan $\mathcal{P}$ de base $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est aussi invariant par l'isométrie f. Sa restriction à $\mathcal{P}$ est, d'après le paragraphe précédent, une rotation d'angle θ. Ainsi, dans ce cas, l'isométrie f est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

Notons que nous pouvons décomposer cette isométrie ainsi :

$$f(\overrightarrow{X}) = (\cos\theta)\overrightarrow{X} + (1 \cos\theta)(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + \sin\theta \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{X}.$$

2. La matrice M est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Le déterminant vaut aussi -1, c'est une isométrie indirecte. La restriction de l'isométrie à la droite vectorielle $\mathcal{D}$ est Id. Le plan $\mathcal{P}$ est invariant par f et sa restriction à $\mathcal{P}$ est une symétrie orthogonale d'axe le vecteur $\overrightarrow{v_4} = \cos\frac{\theta}{2}\overrightarrow{v_2} + \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{v_3}$. Ainsi le plan $\mathcal{P}_1$ engendré par les vecteurs indépendants $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_4}$ est invariant par cette isométrie qui en restriction à ce plan est l'identité. Nous en déduisons que f est une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_1$.
3. Si la matrice M est
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Son déterminant vaut -1, l'isométrie f est indirecte. Mais la matrice M peut s'écrire comme le produit
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
La première matrice représente une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. La deuxième matrice est celle d'une rotation. Ainsi l'isométrie f est ici le composé d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.
4. La matrice M est
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Le déterminant vaut -1 et l'isométrie est indirecte. ici aussi la matrice M s'écrit comme un produit
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
et l'isométrie est la composée de deux symétries orthogonales.

Nous en déduisons

Théorème 10 *Soit f une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Alors f est soit une rotation (de centre O, soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan, soit une composée de ces deux types d'isométries.*

Par exemple, la symétrie centrale qui s'écrit $f(\overrightarrow{X}) = -\overrightarrow{X}$ a pour matrice $-Id$ dans la base canonique. Cette matrice est le produit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la première matrice du produit représente une symétrie orthogonale par rapport au plan ayant pour base $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ bet la deuxième matrice une rotation d'axe la droite portée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ et d'angle $\theta = \pi$.

Un des exercices qu'il faut bien maitriser est celui de reconnaîttre, lorsqu'une isométrie est donnée par sa matrice dans la base canonique (ou une autre), de quel type de transformation il s'agit. Par exemple, donjon nous une matrice orthogonale

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Est-ce que cette matrice représente une rotation ? Pour répondre, nous devons

1. Déterminer si la valeur 1 est une valeur propre, c'est-à-dire si elle est racine du polynôme

$$\det(M - \lambda Id) = 0.$$

   Si ce n'est pas le cas, ce n'est pas une rotation autour d'un axe. Si c'est le cas, on calcule un vecteur $\overrightarrow{v_1}$ tel que $f(\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$.
2. On détermine le plan orthonormé à $\overrightarrow{v_1}$ en déterminant une base orthonormée de ce plan, par exemple en résolvant l'équation $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
3. Si $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base orthonormée de ce plan, on calcule $f(\overrightarrow{v_2})$ que l'on décompose dans la base du plan pour en déduire l'angle θ.