Chapitre 3

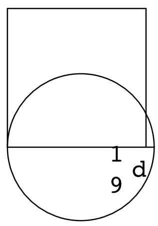
Trois problèmes grecs

A partir du moment où les mathématiciens grecs se sont intéressés à la règle et au compas, ils se sont heurtés à de grandes difficultés. Dès le 5ème siècle avant J.C sont apparus des problèmes que l'on n'arrivait pas à résoudre à la règle et au compas. Ces problèmes ne tardèrent pas à devenir célèbres après les échecs de mathématiciens réputés. Confiants en ces instruments, qui dans d'autres constructions leur avaient fourni des solutions élégantes, les mathématiciens grecs n'ont jamais envisagé l'impossibilité des constructions demandées, il en sera d'ailleurs de même pour la plupart de leurs successeurs.
Parmi ces problèmes nous retiendrons pour notre étude les plus célèbres que sont la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trissection de l'angle. Nous y ajouterons aussi le problème des polygônes réguliers qui fera l'objet de notre dernier chapitre.

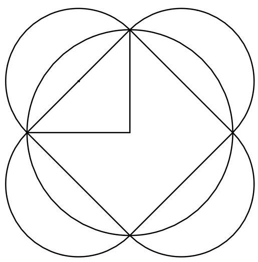
1 La quadrature du cercle

Des quatres problèmes choisis pour notre étude, le plus célèbre est sans doute la quadrature du cercle. L'expression "c'est la quadrature du cercle" est même passée dans le language courant pour désigner une chose impossible. Le mot quadrature est encore utilisé de nos jours en mathématiques, il désigne un calcul d'aire et par extension un calcul d'intégrale. En fait, même pour les Grecs de l'antiquité c'était bien le calcul de l'aire du cercle qu'il fallait obtenir, mais comme ils avaient une mauvaise connaissance du nombre π, ils voulaient ramener le calcul de l'aire du cercle à un calcul plus simple, celui de l'aire du carré.

En fait le problème consistant à ramener l'aire d'un cercle à celle d'un carré est très ancien. On le trouve déjà dans un document égyptien datant de 1650 avant J.C. Ce document s'appelle le "papyrus Rhind" écrit par le scribe Ahmès. Il donne des réponses à 85 problèmes et permet ainsi d'avoir une bonne idée des connaissances mathématiques des Egyptiens du deuxième millénaire. On peut lire: "construire un carré équivalent à un cercle. Réponse: Retirer $\frac{1}{9}$ au diamètre et construire le carré sur ce qui reste".



Si d est le diamètre, l'aire du carré est donc $A = (d - \frac{d}{9})^2 = (\frac{8}{9})^2 d^2$.
Implicitement, ce calcul fournit une valeur approchée de π obtenue par: $(\frac{8}{9})^2 d^2 = \frac{\pi}{4} d^2$ et on trouve $\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} \simeq 3.16$.
Le premier à s'être occupé de la quadrature du cercle semble être Hippocrate de Chios au cinquième siècle avant J.C. Il n'a pas réussi pour le cercle mais il a su quarrer certaines surfaces limitées par des cercles, les lunules. Par exemple l'aire hachurée est égale à l'aire du carré ABCD. L'aire hachurée est l'aire des 4 lunules obtenues à l'aide du cercle Γ circonscrit au carré ABCD et de 4 cercles ayant pour diamètre les côtés du carré. Pour obtenir le résultat il suffit d'établir que l'aire de Γ est égale à 4 fois l'aire du demi-cercle Γ' de diamètre AB. Ceci est immédiat, car si R et R' sont les rayons de Γ et Γ', on a $R^2 = 2R'^2$ et ainsi $4\frac{\pi R'^2}{2} = 2\pi R'^2 = \pi R^2$.



Le problème de la quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné. La donnée du cercle est équivalente à la donnée de son centre O et d'un de ces points I. La construction demandée est donc une construction à la règle et au compas à partir des points de base O et I. Lorsqu'on rapporte le plan au repère (O, I, J) défini dans notre second chapitre, le segment $[OI]$ est l'unité de longueur et l'aire du cercle donné est π.

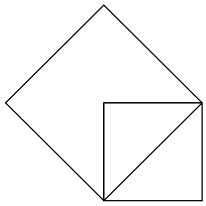
Si la quadrature était possible on pourrait construire à la règle et au compas un carré dont la longueur du côté serait $\sqrt{\pi}$. Grâce au compas on pourrait alors reporter cette longueur et construire un point de l'axe Ox d'abscisse $\sqrt{\pi}$ et ainsi $\sqrt{\pi}$ serait un nombre constructible de même que $\pi = \sqrt{\pi}^2$. Or nous avons vu que π n'était pas un nombre constructible, donc la quadrature du cercle est impossible.

Remarque. Il est bon de noter que Wantzel lui-même n'a pas pu conclure à l'impossibilité de la quadrature car à son époque (1837) on ignorait que π était transcendant. C'est seulement en 1882, grâce à Lindemann, que l'on a pu conclure.

Un problème analogue à celui de la quadrature a dû se poser également aux Grecs de l'antiquité, c'est celui que nous pourrions appeler la rectification de la circonférence: construire à la règle et au compas un segment ayant pour longueur la circonférence d'un cercle donné. Ce problème est, bien sûr, tout aussi impossible que celui de la quadrature pour les mêmes raisons.

2 La duplication du cube

Ce problème consiste à construire à la règle et au compas l'arête d'un cube ayant un volume double de celui d'un cube donné.
La duplication du cube a dû se poser de façon assez naturelle puisqu'il est facile à la règle et au compas, d'effectuer la duplication du carré. Il suffit en effet de construire un nouveau carré ayant pour côté une diagonale du premier.



Une légende, rapportée dans une lettre d'Eratosthène (second siècle avant J.C), explique l'origine de la duplication du cube de la façon suivante. La peste régnait à Délos. L'oracle consulté déclara qu'Apollon voulait qu'on lui érigeat un autel double de l'autel cubique qui lui était consacré. On construisit un autel de côté double, la peste continua. L'oracle à nouveau consulté déclara qu'Apollon n'avait pas eu satisfaction et qu'il voulait un autel exactement le double de l'ancien. A cause de cette légende, la duplication du cube porte le nom de problème de Délos.

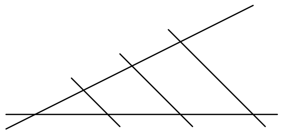
La donnée du cube est équivalente à la donnée d'une de ses arêtes $[OI]$, la construction demandée est donc une construction à la règle et au compas à partir des points de base O et I. Le plan étant rapporté au repère (O, I, J), le volume du cube donné est 1 et le volume du cube cherché est 2. Si la duplication était possible, on pourrait construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ et grâce au compas en reportant cette longueur on obtiendrait un point de l'axe (Ox) d'abscisse $\sqrt[3]{2}$ et ainsi ce nombre serait constructible. Or nous avons vu dans notre second chapitre que ce n'était pas le cas. Ainsi, la duplication du cube est impossible.

Remarque. Alors que la duplication n'est pas possible pour les cubes de la géométrie ordinaire (de dimension 3), elle est possible pour les cubes d'un espace de dimension 4. Dans un tel espace, un cube, dont l'arête a pour longueur a, a pour volume a^4. Un exemple est fourni par le pavé $[O, a]^4$ de $\mathbb{R}^4$. La duplication du cube d'arête unité équivaut alors à la construction (dans le plan) d'un segment de longueur $\sqrt[4]{2}$. Ceci est, bien sûr, possible à la règle et au compas puisque $\sqrt[4]{2}$ est un nombre constructible.

3 La trisection de l'angle

Il n'existe pas de légende qui introduit la trisection de l'angle mais ce problème était assez naturel puisque l'on savait à la règle et au compas construire la bissectrice d'un angle. On peut aussi y voir une analogie avec le problème élémentaire qui consiste à trisecter un segment. Pour trisecter le segment

$[AB]$, il suffit de considérer une droite quelconque D passant pas A, de porter sur D trois segments égaux $[AM_1], [M_1M_2], [M_2M_3]$, de joindre M_3 à B et de mener par M_1 et M_2 les parallèles (BM_3).



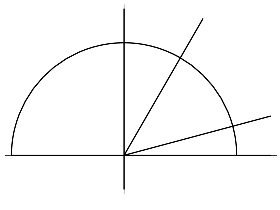
Le problème de la trisection de l'angle consiste à construire à la règle et au compas les demi-droites qui partagent un angle quelconque donné en trois angles égaux. Il suffit en fait de construire une seule des deux demi-droites, l'autre s'en déduit facilement. Avant de démontrer que ce problème est impossible nous allons le traduire dans un language plus commode en introduisant la notion d'angle trisectable.

Les angles concernés par le problème sont les angles non orientés, de tels angles sont en pratique identifiés à leurs mesures en radians qui sont des nombres réels de $[0, \pi]$. D'une façon précise $\widehat{ABC} = \theta$ signifie que θ est l'unique nombre réel de $[0, \pi]$ tel que $cos\ \theta = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}||\ ||\overrightarrow{BC}||}$.

Les points de base O et I étant donnés, on peut toujours se ramener à ne considérer que des angles représentés par des demi-droites d'origine O dont l'une est la demi-droite $[OI)$. On désigne par Γ le cercle de centre O passant par I , par demi-cercle Γ nous entendrons le demi-cercle situé au dessus de la droite (OI). Si $\theta \in [0, \pi]$, nous dirons que l'angle θ est constructible si le point M du demi-cercle Γ tel que $\widehat{IOM} = \theta$ est un point constructible. Cela équivaut à dire que $cos\ \theta$ est un nombre constructible puisqu'on passe de M à sa projection sur (Ox) par un tracé de perpendiculaire.

Par exemple, les angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ qui ont pour cosinus 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont constructibles, par contre l'angle θ tel que $cos\ \theta = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ n'est pas constructible.

Etant donné un angle $\theta = \widehat{IOM}$ où M est un point du demi-cercle Γ, nous dirons qu'il est trisectable si le point N du demi-cercle Γ tel que $\widehat{ION} = \frac{\theta}{3}$ est un point constructible à partir des trois points de base O, I, M. Le problème de la trisection de l'angle concerne donc des constructions à partir de trois points de base et non pas de deux comme pour la quadrature ou la duplication. Toutefois, si $\theta = \widehat{IOM}$ est un angle constructible, le point M est constructible à partir des points O et I et les constructions à partir de O, I, M sont identiques à celles effectuées à partir de O et I. Dans ce cas dire, que l'angle θ est trisectable équivaut à dire que l'angle $\frac{\theta}{3}$ est constructible, c'est-à-dire que $cos\ \frac{\theta}{3}$ est un nombre constructible. Ainsi les angles π et $\frac{\pi}{2}$ sont trisectables car $cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont des nombres constructibles.



Ce que nous voulons démontrer ici est l'impossibilité de la trisection d'un angle en général. Il nous suffira donc de démontrer par exemple que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable. Comme l'angle $\frac{\pi}{3}$ est constructible, cela revient à démontrer que $cos\ \frac{\pi}{9}$ n'est pas un nombre constructible.

Nous avons $cos\ 3\theta = 4\ cos^3\theta - 3\ cos\theta$. Il en résulte que $cos\ \frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$. Nous allons démontrer que ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. S'il se décomposait dans $\mathbb{Q}[X]$, un des facteurs de la décomposition serait du premier degré et le polynôme aurait une racine dans $\mathbb{Q}$. Montrons que $P(X)$ est sans racine dans $\mathbb{Q}$. Supposons que $\frac{p}{q}$ soit un nombre rationnel mis sous forme irréductible tel que $P(\frac{p}{q}) = 0$. On a alors $8\ p^3 - 6\ p\ q^2 = q^3$. Il en résulte que p divise q^3 et que q^2 divise $8\ p^3$, d'où $p = \pm 1$ et $q = \pm 1$ ou ± 2. Les valeurs possibles de $\frac{p}{q}$ sont donc ± 1 et $\pm\frac{1}{2}$. On vérifie alors directement que ces quatres nombres ne sont pas racines de $P(X)$. Ainsi $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\frac{P(X)}{4}$ est le polynôme minimal de $cos\ \frac{\pi}{9}$ sur $\mathbb{Q}$. Le nombre $cos\ \frac{\pi}{9}$ est donc algébrique et de degré 3 sur $\mathbb{Q}$. Compte tenu du résultat de Wantzel, $cos\ \frac{\pi}{9}$ n'est pas un nombre constructible et ainsi $\frac{\pi}{3}$ n'est pas un angle trisectable.

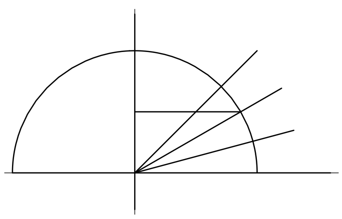
Remarques.

1. Nous venons de démontrer que l'angle de $60\,°$, $(\frac{\pi}{3})$, n'est pas trisectable en montrant que l'angle de $20\,°$, $(\frac{\pi}{9})$, n'est pas constructible. Il en résulte alors que les angles de $1\,°$, $2\,°$, $4\,°$, $5\,°$, $10\,°$ ne sont pas constructibles. Cela provient du fait que lorsqu'un angle est constructible, ses multiples le sont aussi car ils sont obtenus en reportant un certain nombre de fois au compas la corde du cercle Γ sous-tendue par l'angle.

   Lors de l'étude des polygônes réguliers, nous verrons que l'angle de 3 est constructible. Cet angle fournit un nouvel exemple d'angle constructible non trisectable.

2. Si θ est un angle trisectable, il en est de même de l'angle $\frac{\theta}{2}$. En effet, si M est le point du demi-cercle Γ tel que $\widehat{IOM} = \frac{\theta}{2}$, en reportant la corde IM on construit l'angle θ, celui-ci étant trisectable on peut construire l'angle $\frac{\theta}{3}$ et à l'aide d'une bissectrice on obtient l'angle $\frac{1}{2}\ (\frac{\theta}{3}) = \frac{1}{3}\ (\frac{\theta}{2})$ et ainsi l'angle $\frac{\theta}{2}$ est trisectable.

   En utilisant cette remarque, sachant que l'angle π est trisectable, on obtient que les angles de la forme $\frac{\pi}{2^n}$ sont trisectables. La figure suivante indique la trisection de l'angle $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.



3. Nous donnons ici un exemple d'angle trisectable et non constructible. Si f est la fonction définie par $f(\theta) = cos\ \frac{\theta}{3} - cos\ \theta$, f est continue et on a $f(0) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, il

résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe θ_0 appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(\theta_0) = \frac{1}{2}$. On a donc

$$cos\ \frac{\theta_0}{3} = cos\ \theta_0 + \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

D'après (1), l'angle θ_0 est trisectable car si M est le point du demi-cercle Γ tel que $\widehat{IOM} = \theta_0$, alors à partir des points O, I, M on construit sur la droite (OI) le point d'abscisse $cos\ \theta_0$ puis d'après (1), le point d'abscisse $cos\ \frac{\theta_0}{3}$.

Montrons que l'angle θ_0 n'est pas constructible. On a $cos\ \theta_0 = 4\ cos^3\ \frac{\theta_0}{3} - 3\ cos\ \frac{\theta_0}{3}$ et d'après (1), $4\ cos^3\ \frac{\theta_0}{3} - 3\ cos\ \frac{\theta_0}{3} = cos\ \frac{\theta_0}{3} - \frac{1}{2}$. Il en résulte alors que $cos\ \frac{\theta_0}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 4X + \frac{1}{2}$. On montre que ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On utilise pour cela la même méthode que celle employée pour le polynôme $4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$ à propos de $cos\ \frac{\pi}{9}$. Il en résulte que $cos\ \frac{\theta_0}{3}$ n'est pas constructible et d'après (1), $cos\ \theta_0$ n'est pas constructible.

A partir de (1), on peut chercher une valeur approchée de θ_0. On obtient que l'angle θ_0 a une mesure comprise entre $64\,°$ et $65\,°$.

Au second chapitre, nous avons étudié les constructions à la règle et au compas à partir de deux points de base. Lorsqu'on utilise un ensemble $\mathcal{B}$ de points de base ayant plus de deux éléments, on choisit dans $\mathcal{B}$ deux points que l'on note O et I, à partir de ces points on construit comme précédemment le repère (O, I, J), les autres points de base sont alors déterminés par leurs coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dans ce repère. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des coordonnées dans (O, I, J) des points constructibles à la règle et au compas à partir de $\mathcal{B}$. Les éléments de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ sont appelés nombres constructibles à partir de $\mathcal{B}$.
Il est facile alors de généraliser les résultats obtenus avec deux points de base.

- Le théorème 1 du second chapitre devient: $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et stable par racine carrée.
- Le théorème 2 du second chapitre devient: Si tR est un réel, t appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ si et seulement si il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$, $L_1, L_2, \ldots, L_p$ tels que:
  - $L_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,
  - pour $1 \leq j \leq p-1$, $\quad L_j \subset L_{j+1}$ et $[L_{j+1}, L_j] = 2$,
  - $t \in L_p$.
- Le résultat de Wantzel (Théorème 3 Chapitre 2) devient: Tout nombre constructible à partir de $\mathcal{B}$ est algébrique sur le corps $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et son degré est une puissance de 2.

Nous venons de voir que si M est un point du demi-cercle Γ, l'angle $\theta = \widehat{IOM}$ est dit trisectable si le point N du demi-cercle Γ tel que $\frac{\theta}{3} = \widehat{ION}$ est un point constructible à partir de $\mathcal{B} = \{O, I, M\}$. Ceci équivaut à dire que $cos\ \frac{\theta}{3} \in\ \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.
Nous donnons ici une caractérisation des angles trisectables.

Théorème 1 *L'angle θ est trisectable si et seulement si le polynôme $4X^3 - 3X - cos\ \theta$ est réductible dans $\mathbb{Q}(cos\theta)[X]$.*

Démonstration.

- Supposons que $\theta = \widehat{IOM}$ soit trisectable, alors $cos\ \frac{\theta}{3}$ appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ où $\mathcal{B} = \{O, I, M\}$. Le résultat de Wantzel généralisé nous dit alors que $cos\ \frac{\theta}{3}$ est algébrique avec pour degré une puissance de 2 sur $\mathbb{Q}(cos\theta, sin\theta)$.

  On a $\mathbb{Q}(cos\theta) \subset \mathbb{Q}(cos\theta, sin\theta)$ et le degré de cette extension est 1 ou 2 car $sin\theta$ est racine du polynôme $X^2 + cos^2\theta - 1$. Il est alors facile de voir que $cos\ \frac{\theta}{3}$ est aussi algébrique sur $\mathbb{Q}(cos\theta)$ avec un degré qui est aussi une puissance de 2. Le polynôme minimal de $cos\ \frac{\theta}{3}$ sur $\mathbb{Q}(cos\theta)$ ne peut donc pas être de degré 3 et il divise le polynôme $4X^2 - 3X - cos\theta$ dont $cos\ \frac{\theta}{3}$ est racine. Ce dernier polynôme est donc irréductible dans $\mathbb{Q}(cos\theta)[X]$.

- Supposons que $4X^2 - 3X - cos\theta$ soit irréductible dans $\mathbb{Q}(cos\theta)[X]$. Comme $cos\ \frac{\theta}{3}$ est racine de ce polynôme, il est racine d'un des deux facteurs de décomposition de $4X^2 - 3X - cos\theta$ qui sont de degré 1 ou 2 et à coefficients dans $\mathbb{Q}(cos\theta)$ et est stable par racine carrée on a $cos\ \frac{\theta}{3}$ qui appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ et ainsi θ est un angle trisectable.□

Ce résultat, assez théorique permet difficilement de démontrer qu'un angle est trisectable. Il est plus facile de l'utiliser dans l'autre sens pour montrer qu'un polynôme est réductible. Par exemple, nous avons établi que les angles π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ sont trisectables. On obtient, d'après le Théorème 1, les polynômes irréductibles suivants:

En prenant $\theta = \pi$, on déduit que $4X^3 - 3X + 1$ est réductible sur $\mathbb{Q}$ et on a

$$4X^3 - 3X + 1 = (X + 1)(4X^2 - 4X + 1).$$

En prenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $4X^3 - 3X$ réductible sur $\mathbb{Q}$, ce qui est évident.

Et enfin, en prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2}$ est réductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Ce qui n'est pas évident mais on peut le vérifier par: $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2} = (X + \frac{\sqrt{2}}{2})(4X^2 - 2\sqrt{2}X - 1)$.