Mathématiques : ALGÈBRE LINÉAIRE et APPLICATIONS

Contrôle Continu Intermédiaire : durée 1H30

Les calculatrices, ordinateurs et téléphones portables sont interdits.
Tout résultat doit être justifié. La rédaction sera prise en compte.

ELEMENTS DE REPONSES

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par son expression analytique

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y - 2z, 3x - z).$$

(1) Ecrire sa matrice relative à la base canonique.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Déterminer son noyau (on en donnera une base ainsi que sa dimension). Cette application est-elle injective ?

Le noyau de f est l'espace vectoriel

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in Ker(f) &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ 3x \quad - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x \\ y = -4x \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = -4x \text{ et } z = 3x\} = \{(x, -4x, 3x); x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1, -4, 3)}_{v_1}\}$$

La famille $\{v_1\}$ est une famille génératrice de $Ker(f)$ et aussi une famille libre puisque $v_1 \neq \overrightarrow{0}$ donc $\{v_1\}$ est une base et $\dim Ker(f) = 1$.

Comme $Ker(f) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ l'application f est n'est pas injective.

(3) Quel est le rang de f ? Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(f)) + rang(f)$$

d'où

$$rang(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Comme $\dim(Im(f)) = rang(f)$, la dimension de Imf est 2 et une base de Imf est donnée par deux vecteurs de Imf linéairement indépendants. Prenons $f(e_1) = (1,2,3)$ et $f(e_2) = (1,-1,0)$ qui sont des vecteurs de Imf. Ils forment une famille libre puisque

$$\alpha(1,2,3) + \beta(1,-1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\beta, 2\alpha-\beta, 3\alpha) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = 0 = \beta$$

Ainsi $\{(1,2,3),(1,-1,0)\}$ est une base de Imf.

On pouvait aussi utiliser $Imf = Vect_{\mathbb{R}}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ et extraire une famille libre de la famille génératrice $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

(4) Le vecteur $v = (2,1,3)$ appartient-il a l'image de f ?

$v \in Imf$ si et seulement s'il existe α et β dans $\mathbb{R}$ et $v = \alpha(1,2,3) + \beta(1,-1,0)$. On a

$$v = \alpha(1,2,3) + \beta(1,-1,0) \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 1$$

Ainsi $v = v_1 + v_2$ et v appartient à l'image de f.

Remarque. On a, puisque f est linéaire, $v = f(e_1 + e_2)$.

(5) Le noyau et l'image sont-ils en somme directe ?

Ils sont en somme directe si et seulement si $Ker(f) \cup Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. C'est aussi équivalent à voir si une concaténation d'une base de $Ker(f)$ et d'une base de $Im(f)$ est une famille libre. Comme une base de $Ker(f)$ est $\{\underbrace{(1,-4,3)}_{v_1}\}$ une base de Imf est $\{\underbrace{(1,2,3)}_{v_2}, \underbrace{(1,-1,0)}_{v_3}\}$, on regarde si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Puisqu'on a 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ on peut faire le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $det(M) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -18 \neq 0$ donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et $Kerf$ et Imf sont en somme directe.

Remarque : En fait on a aussi que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ puisque on a une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_i \in \mathbb{R}\}$ défini par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. On a

$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4; 2x_1+x_2-3x_3=0 \text{ et } -x_1+2x_3-x_4=0\}$$

(a) l'ensemble F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$.

(b) l'ensemble F est non-vide puisque $\overrightarrow{0}=(0,0,0,0)\in F$: ce vecteur vérifie bien les deux conditions,

$$\begin{cases} 2\times 0+0-3\times 0=0,\\ -0+2\times 0-0=0.\end{cases}$$

(c) Soient $X=(x_1,x_2,x_3,x_4), Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in F$ c'est à dire que

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=0,\\ -x_1+2x_3-x_4=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2y_1+y_2-3y_3=0,\\ -y_1+2y_3-y_4=0.\end{cases}$$

Alors le vecteur $X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4)$ vérifie

$$\begin{cases} 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-3(x_3+y_3)=\underbrace{(2x_1+x_2-3x_3)}_{=0 \text{ car } X\in F}+\underbrace{(2y_1+y_2-3y_3)}_{=0 \text{ car } Y\in F}=0+0=0,\\ -(x_1+y_1)+2(x_3+y_3)-(x_4+y_4)=\underbrace{(-x_1+2x_3-x_4)}_{=0 \text{ car } X\in F}+\underbrace{(-y_1+2y_3-y_4)}_{=0 \text{ car } Y\in F}=0+0=0.\end{cases}$$

donc $X+Y\in F$

(d) Soit $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors le vecteur $\alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4)$ vérifie

$$\begin{cases} 2\alpha x_1+\alpha x_2-3\alpha x_3=\alpha\underbrace{(2x_1+x_2-3x_3)}_{=0 \text{ car } X\in F}=\alpha 0=0,\\ -\alpha x_1+2\alpha x_3-\alpha x_4=\alpha\underbrace{(-x_1+2x_3-x_4)}_{=0 \text{ car } X\in F}=\alpha 0=0.\end{cases}$$

donc $\alpha X\in F$

L'ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de F et la dimension de cet espace.

On a

$$\begin{aligned} F &=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\ 2x_1+x_2-3x_3=0, -x_1+2x_3-x_4=0\}\\ &=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4;\ x_2=3x_3-2x_1, x_4=-x_1+2x_3\}\\ &=\{(x_1,3x_3-2x_1,x_3,x_1+2x_3);\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\}\\ &=\{x_1\underbrace{(1,-2,0,1)}_{v_1}+x_3\underbrace{(0,3,1,2)}_{v_2};\ x_1,x_3\in\mathbb{R}\}\\ &=Vect_{\mathbb{R}}\{v_1,v_2\}\end{aligned}$$

La famille $\{v_1,v_2\}$ est une famille génératrice de F, et puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre. Ainsi $\{v_1,v_2\}$ est une base de F et $\dim F = Card(\{v_1,v_2\})=2$.

(3) Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$. Une base de $\mathbb{R}^4$ est une famille de 4 vecteurs libres de $\mathbb{R}^4$. Il faut donc ajouter 2 vecteurs v_3,v_4 à la famille libre $\{v_1,v_2\}$ et que la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ soit libre. Prenons $\{v_1,v_2,v_3=e_3,v_4=e_4\}$. On a

$$det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&1&1&0\\-1&2&0&1\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}=3\neq 0$$

donc la famille de 4 vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

(4) Donner un espace G supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Les espaces G et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow F \oplus G = \mathbb{R}^4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \cup G = \{\overrightarrow{0}\} \text{ (somme directe)} \\ \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ une concaténation d'une base de F *et* d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^4$

Prenons $G = Vect_{\mathbb{R}}\{v_3, v_4\}$. La famille $\{v_3, v_4\}$ est par définition de G, une famille génératrice de G et c'est aussi une famille libre comme famille extraite de d'une base donc d'une famille libre de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de G. D'après ce que l'on a vu a la question précédent, l'espace G ainsi défini est bien supplémentaire de F (une concaténation d'une base de F et G donne bien une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. On considére l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Soit les vecteurs $v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,1,-1)$ et $v_3 = (2,-1,1)$.

(1) Vérifier qu'ils forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

On a une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 donc c'est une base si la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est de déterminant différent de 0 (car une famille de 3 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3 est une famille libre maximale donc une base de cet espace). On a

$$det(P) = -1 \times det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(1+1) + 2(-1-1) = -2 - 4 = -6 \neq 0$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que l'inverse de cette matrice.

La matrice P est précisement la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$.

On a

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)}\ {}^t(ComP) = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $P^{-1}P = Id$.

Remarque : la matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ à la base canonique.

(3) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$A' = P^{-1}AP = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Certains ont voulu utiliser la définition de A' qui est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Par exemple pour obtenir la deuxième colonne de cette matrice on doit alors exprimer $f(v_2) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = (1, 1, -1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ c'est à dire ici $f(v_1) = v_1$ (ici v_1 est un vecteur propre associé à f, ce qui explique qu'il est facile de trouver les coordonnées de $f(v_1)$ dans la base $\mathcal{B}'$). En général il est préférable d'utiliser le calcul matriciel comme on va le faire dans la question suivante.

(4) Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ ainsi que les coordonnées de l'image de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit X le vecteur colonne des coordonnées du vecteur v dans la base canonique et X' le vecteur colonne des coordonnées de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que

$$v = 2v_1 + v_3.$$

Le vecteur $f(v)$ a lui aussi des coordonnées dans les bases canonique et $\mathcal{B}'$. Notons Y le vecteur colonne des coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique et Y' le vecteur colonne des cordonnées de ce même vecteur dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc deux manières de trouver les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a donc deux solutions

(a) $Y' = A'X'$

(b) On a $Y = AX$ et $Y' = P^{-1}Y$

On trouve $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$ donc $f(v) = 16v_3$.