# CNAM USAL 3N

## Exercices PROBABILITES

---

**Exercice 1** On parie sur un nombre compris entre 0 et 6. On lance 3 dés.

- On gagne 3€ si ce numéro sort 3 fois
- On gagne 2€ si ce numéro sort 2 fois
- On gagne 1€ si ce numéro sort 1 fois
- On perd 1€ si ce numéro ne sort pas.

Soit $X$ la variable aléatoire représentant le gain. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

---

### Solution

La variable aléatoire $X$ peut prendre les valeurs 3, 2, 1 ou $-1$. Ainsi

$$X(\Omega) = \{-1, 1, 2, 3\}.$$

On lance 3 dés. Donc $\Omega$ contient $6^3 = 216$ éléments

- Pour obtenir 3 fois le numéro parié on a donc $\frac{1}{216}$ chances.
- Pour obtenir 2 fois le numéro parié, on a 3 possibilités sur le choix du dé ne donnant pas ce numéro et 5 possibilités sur le chiffre de ce dé. Ainsi la probabilité est $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$
- Pour obtenir 1 fois le numéro parié, on a 3 possibilités sur le choix du dé donnant ce numéro et 5 possibilités sur chacun des 2 autres dés. La probabilité sera $\frac{3 \times 5 \times 5}{216} = \frac{75}{216}$
- Pour ne pas obtenir le numéro parié, on a 5 choix sur chaque dé. La probabilité sera $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$

Le tableau correspondant à $X$ sera

| $x_i$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ |

L'esperance de X est

$$E(X) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + \frac{2 \times 15}{216} + \frac{3 \times 1}{216}$$

$$= \frac{-17}{216} \simeq -0{,}08$$

On perd en moyenne 8 cts par partie.

La variance est

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$E(X^2) = \frac{200}{216} + \frac{60}{216} + \frac{9}{216}$$ ($X^2$ prend les valeurs 1 avec $p_1 = \frac{125+75}{216}$, 4 avec $p_2 = \frac{15}{216}$ et 9 avec $p_3 = \frac{1}{216}$)

$$= \frac{269}{216}$$

$$V(X) = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 \simeq 1{,}24$$

On en déduit l'écart type:

$$\sigma = \sqrt{1{,}24} = 1{,}11$$

---

Exercice 2 On lance une paire de dés, quatre fois. Quelle est la probabilité que le nombre "sept" n'apparaisse jamais?

---

Solution

L'espace fondamental contient 36 éléments:

$$\Omega = \{ (i,j) \,,\ 1 \leq i,j \leq 6 \}$$

Le nombre "sept" apparait correspond à l'évènement

$$A = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

On en déduit $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = p$

La variable X correspondant au "nombre" lu à chaque lancer suit la loi binomiale. On veut 0 succés sur 4 lancers. D'où

$$P_4(0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \qquad \left( \binom{4}{0} = \frac{4!}{4!\,0!} = 1 \,,\ \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 1 \right)$$

Exercice 3. On lance un dé cinq fois. Quelle est la probabilité pour que le six sorte 2 fois

---

Solution

Soit X la variable aléatoire correspond au chiffre qui sort.

$$P(X=6) = \frac{1}{6}$$

On considère un schéma binomial.

Si $p_n(k)$ est la probabilité d'avoir k succès (le 6 sort k fois) pour n lancer, on a

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ici on veut $k=2$ et $n=5$

$$p_5(2) = \binom{2}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,3!} \frac{1}{36} \times \frac{75}{216}$$

$$= \frac{5\times 4}{2} \times \frac{75}{36\times 216} = \frac{375}{18\times 216}$$

$$p_5(2) \simeq 0{,}16$$

---

Exercice 4 On lance simultanément quatre dès à 6 faces. Soit X la variable aléatoire correspondant au plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

---

Correction

L'espace fondamental $\Omega$ contient $6^4 = 1296$ éléments et $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soit $A_i$ l'évènement : " le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i." On a donc

$P(A_6) = 1$ ; $P(A_5) = \frac{5^4}{6^4}$ ; $P(A_4) = \frac{4^4}{6^4}$ ; $P(A_3) = \frac{3^4}{6^4}$ ; $P(A_2) = \frac{2^4}{6^4}$ ; $P(A_1) = \frac{1}{6^4}$

$P(X=6) = P(A_6) - P(A_5)$ ; $P(X=i) = P(A_i) - P(A_{i-1})$ si $i \geq 2$

et $P(X=1) = P(A_1)$

La loi de X est donc résumée dans le tableau

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6^4}$ | $\frac{15}{6^4}$ | $\frac{65}{6^4}$ | $\frac{175}{6^4}$ | $\frac{369}{6^4}$ | $\frac{671}{6^4}$ |

$$E(X) = \sum x_i p_i \simeq 5,24$$

$$V(X) = \sum x_i^2 p_i \simeq 0,91 .$$

---

Exercice 5 On lance des fusées vers Mars. La probabilité de réussite à chaque lancer est 0,7 . On effectue 10 lancers successifs.

1° Quelle est la probabilité de n'avoir aucun lancer réussi.

2° Combien de lancers faut-il faire pour avoir 98% de chance pour qu'au moins un lancer réussisse ?

---

Solution

1° La variable aléatoire correspondant aux lancers suit la loi binomiale

$$P(X=k) = \binom{10}{k}(0,7)^k(0,3)^{10-k}$$

Pour une telle loi on sait que

$$E(X) = np = 7.$$

Ceci correspond au nombre moyen de lancers réussis.

Pour n'avoir aucun lancer réussi, on considère $k=0$

$$P(X=0) = \binom{10}{0}(0,7)^0(0,3)^{10} = (0,3)^{10} \simeq 0,6\ 10^{-6}$$

2° Supposons que l'on fasse n lancer

$$P(X=k) = \binom{n}{k}(0,7)^k(0,3)^{n-k}$$

Si $k=0$ $P(X=0) = (0,3)^n$ Ainsi $(0,3)^n \leq 0,02 \Rightarrow n \geq 4$

Exercice 6 Une usini fabrique des composants électroniques dont 5% présentent des défauts. On considère un échantillon de 200 objets.

1- Quelle est la probabilité qu'aucun objet ne soit défectueux.

2. Quelle est la probabilité qu'un seul objet soit défectueux

3- Quelle et la probabilité qu'au plus 3 objets soient défectueux

---

Solution

La probabilité qu'un objet soit défectueux est

$$p = \frac{5}{100}$$

La loi de probabilité est la loi binomiale

1° La probabilité qu'aucun objet soit défectueux est

$$P_{200}(0) = \binom{200}{0} 0{,}05^0 (0{,}95)^{200} = (0{,}95)^{200}$$

Calcul de $(0,95)^{200}$

$$\ln (0{,}95)^{200} = 200 \ln(0{,}95) \simeq 200 \times (-0{,}051) = -10{,}2$$

$$\exp(-10{,}2) = 3{,}6 \; 10^{-5} = 0{,}000036$$

$$P_{200}(0) \simeq 0{,}000036$$

2° On calcule $P_{200}(1)$

$$P_{200}(1) = \binom{200}{1} \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{199} = 200 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{199}$$

$$= 10 \times (0{,}95)^{199}$$

$$\simeq 0{,}000037$$

3° La probabilité qu'au plus 3 objets soient défectueux est

$$P(0) + P(1) + p(2) + p(3) = (0{,}95)^{200} + 10 \times (0{,}95)^{199} + \binom{200}{2} \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^{198}$$

$$+ \binom{200}{3} \times 0{,}05^3 \times 0{,}95^{197}$$

$$\simeq 0{,}009$$

---

Scanné avec CamScanner

Exercice 7 Un vaccin provoque chez 1 individu sur 800 une réaction forte. On vaccine 3000 personnes. Quelle est la probabilité pour que 3 personnes réagissent ?

---

Solution

La variable suit la loi binomiale

$$n = 3000 \qquad p = \frac{1}{800}$$

$$P_n(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(3) = \binom{3000}{3} \left(\frac{1}{800}\right)^{3} \left(\frac{799}{800}\right)^{2997}$$

$$= \frac{3000!}{3!\ 2997!} \times \frac{1}{800^3} \times \left(\frac{799}{800}\right)^{2997}$$

Faisons une approximation avec la loi normale

On sait que pour la loi binomiale

$$E(X) = np = \frac{3000}{800} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3,75$$

$$V(X) = npq = \frac{15}{4} \times \frac{799}{800} = 3,745$$

Comme $np = 3,75$, $npq = 3,74$ on ne peut pas trop appliquer le théorème d'approximation.

Remarque : Approximation par la loi de Poisson.

Cette loi se formule ainsi

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{avec } \lambda = E(X)$$

Ici $E(X) = 3,75$

$$P(X=3) = e^{-3,75} \frac{(+3,75)^3}{6} \simeq \frac{0,0235 \times 52,73}{6} = 0,206$$

On peut approximer par la loi de Poisson si $n$ grand (ici $n = 3000$), $np \simeq 5$ (ici $np = 3,75$)

Donc l'approximation est convenable.

On a donc $p(3) \simeq 0,20$

Exercice 8 : On dispose de 10 boîtes numérotées de 1 à 10. Dans la boîte numéro k, on met k boules numérotées. On choisit au hasard une boîte et dans cette boîte une boule. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple $(X,Y)$
2. En déduire la loi de $Y$
3. Calculer $E(Y)$

---

## Solution

1. Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,10\}^2$ on a

$$P((X,Y)=(i,j)) = P(X=i)\,P(Y=j \,/\, X=i)$$

Ainsi si $j > i$, alors $P((X,Y)=(i,j)) = 0$

Si $i \geqslant j$ alors

$$P((X,Y)=(i,j)) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{10i}$$

2. $Y(\Omega) = \{1,\dots,10\}$.

$$P(Y=k) = P(X=k, Y=k) + P(X=k+1, Y=k) + \dots + P(X=10, Y=k)$$

$$= \frac{1}{10k} + \frac{1}{10(k+1)} + \dots + \frac{1}{10\times 10} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{10}\right)$$

3) $E(Y) = 1.\,P(Y=1) + \dots + 10\,P(Y=10)$

$$= 1\left(\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{10}\right)\right) + \frac{2}{10}\left(\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{10}\right) + \dots + \frac{10}{10}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{10}+\frac{2}{2}+\dots+\frac{2}{10}+\dots+\frac{10}{10}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\dots+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\dots+\frac{10}{10}\right]$$

$$= 10\left[1+\frac{3}{2}+\frac{6}{3}+\dots+\frac{55}{10}\right]$$

$$= \frac{13}{4}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 9 Un fournisseur d'accès internet dessert 5000 abonnés.
A un instant donné, chaque abonné a une probabilité de 20% d'être connecté.

1. Soit X la V.A égale au nombre d'abonnés à l'instant t.
   Quelle est la loi de X ; Calculer $E(X)$ et $V(X)$
2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Montrer que l'on peut approcher la loi de ~~X~~ par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$
3. Donner une valeur approchée du nombre de connexions simultanées que le fournisseur peut gérer pour que la probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%.

---

Solution

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n=5000$, $p=0{,}2$.
   Son espérance $E(X) = np = 1000$
   Sa variance $V(X) = npq = 1000 \times 0{,}8 = 800$.
2. $npq = 800 \gg 1$. On peut faire l'approximation.
3. Cherchons N tel que

$$P(X \geq N) \leq 0{,}25$$

or $X \geq N \Rightarrow Y \geq \frac{N-1000}{\sqrt{800}}$

$$P\left(Y \geq \frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right)$$

donc $\phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right) \geq 0{,}975 = \phi(1{,}96)$

d'après les tables

D'où $\frac{N-1000}{\sqrt{800}} \geq 1{,}96$

soit $N \geq 1{,}96 \times \sqrt{800} + 1000 = 1056$ (on prend la partie entière)

Le fournisseur doit donc pouvoir gérer 1056 connexions.