

Technicien Développeur. Année 2.

Mathématiques

Cours Michel GOZE

*Chapitre 3*

---

# Variables aléatoires. Variables aléatoires finies

---

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé. En général l'ensemble  $\Omega$  est un ensemble relativement compliqué sur lequel il est difficile de faire des opérations mathématiques. Imaginons par exemple, une étude sur la population des anchois en Méditerranée. Cette population est difficilement discernable D'où l'idée naturelle de remplacer cet ensemble  $\Omega$  par un ensemble mathématiques plus accessible aux opérations,  $\mathbb{R}$ , par exemple, en privilégiant un caractère particulier de  $\Omega$ . Dans tout ce chapitre, on s'intéressera essentiellement au cas où l'ensemble  $\Omega$  est fini. Dans ce cas, on prendra comme espace probailisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ .

**Dans tout ce chapitre, l'espace probabilisable  $\Omega$  sera supposé être un ensemble FINI.**

## 1. DÉFINITION ET EXEMPLES

**1.1. Définition d'une variable aléatoire finie.** Dans le cas où  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  est un espace probabilisé fini, la notion de variable aléatoire (parfois appelée aussi caractère) est très simple.

**Définition 1.** *Soit  $(\Omega, \mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. On appelle variable aléatoire sur cet espace toute fonction*

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une variable aléatoire prend, dans ce cas fini, qu'un nombre fini de valeurs  $x_1, \dots, x_s$  que nous convenons de classer dans le sens croissant :

$$x_1 < x_2 < \dots < x_s.$$

L'ensemble fini  $\Omega_X = \{x_1, \dots, x_s\}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  appelé l'ensemble fondamental de la variable aléatoire  $X$ . Nous voyons déjà l'intérêt de cette notion de variable aléatoire, nous transposons l'étude des probabilités dans des sous-ensembles (ici finis) de  $\mathbb{R}$ , alors que l'ensemble de base  $\Omega$  était plus ou moins bien défini mathématiquement.

Pour chacune de ces valeurs  $x_i$ , nous pouvons considérer le sous-ensemble

$$X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}.$$

Attention à la notation  $X^{-1}$  qui ne signifie pas prendre l'inverse ou la fonction réciproque de  $X$  qui n'existe pas en général. Mais cet ensemble  $X^{-1}(x_i)$  est l'ensemble de tous les événements élémentaires  $\omega$  qui ont pour image le réel fixé  $x_i$ , et par définition de  $x_i$ , cet ensemble est non vide.

On s'intéressera également au sous-ensemble de  $\Omega$  défini par

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x < x_1$ , il est clair que cet ensemble est vide. Si  $x_i \leq x < x_{i+1}$ , alors

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}(x_1) \cup \dots \cup X^{-1}(x_i).$$

De même, on définit pour tout segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , le sous-ensemble de  $\Omega$  :

$$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\}.$$

## 1.2. Exemples.

- (1) Soit  $\Omega$  l'ensemble des épreuves consistant à tester tous les habitants de Mulhouse. La fonction : " à un individu on fait correspondre le résultat du test " est une variable aléatoire. Dans ce cas  $\Omega_X = \{P, N\}$  pour Positif, Négatif.
- (2) La fonction qui à un lancer de dé fait correspondre sa marque est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a

$$\Omega = \Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- (3) Considérons toujours le lancer d'un dé cubique. La fonction  $Y$  qui aux marques paires fait correspondre 1 et aux impaires 0 est une variable aléatoire. Dans ce cas, on a

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et

$$\Omega_Y = \{0, 1\}.$$

Notons que

$$Y^{-1}(0) = \{1, 3, 5\}$$

et

$$Y^{-1}(1) = \{2, 4, 6\}.$$

- (4) Soit  $\Omega$  l'ensemble des élèves de la classe. L'application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui à un élève fait correspondre son âge est une variable aléatoire et

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$$

correspondra à l'ensemble des élèves qui ont moins (éventuellement égal) de  $[x]$  ans, où  $[x]$  est la partie entière du nombre réel  $x$ .

- (5) Considérons le lancer d'un dé et notons par  $f_i$  la face du dé correspondant au chiffre  $i$ . Alors  $\Omega = \{f_1, \dots, f_6\}$  et  $X$  donnée par  $X(f_i) = i$  est une variable aléatoire.

(6) On note par  $h$  et  $t$  les côtés pile et face d'une pièce de monnaie. L'expérience associée au lancer de cette pièce correspond à  $\Omega = \{h, t\}$ . L'application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$X(h) = 1, \quad X(t) = 0$$

est une variable aléatoire sur  $\Omega$ . Si nous considérons maintenant l'expérience associée à  $n$  lancers successifs, alors  $\Omega_1 = \Omega^n$ . Un événement élémentaire est un mot du type  $\omega = hhtth\dots t$  de longueur  $n$  écrit avec les seules lettres  $h$  et  $t$ . L'application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$X(\omega) = \text{nombre de lettres } h \text{ dans le mot } \omega$$

est une variable aléatoire. Elle décrit le nombre de fois où pile est obtenu au cours de  $n$  lancers successifs.

**1.3. Somme, produit de variables aléatoires.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  on peut définir la somme et le produit de ces deux applications :

$$X + Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Par exemple, si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_L\}$ , alors

$$(X + Y)(\Omega) = \{x_i + y_j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, L\}.$$

On définit de même le produit

$$XY : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega).$$

Par exemple, si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_L\}$ , alors

$$(XY)(\Omega) = \{x_i y_j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, L\}.$$

**1.4. Image d'une variable aléatoire.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  et soit

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction (continue, dérivable, indéfiniment de fois dérivable) d'une variable réelle.

**Définition 2.** On appelle variable aléatoire image de  $X$  par  $\varphi$ , l'application

$$Y = \varphi(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(X)(\omega) = \varphi(X(\omega)).$$

Si  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$  et si  $Y = \varphi(X)$ , alors  $Y(\Omega) = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N)\}$ . Notons que dans ce dernier ensemble, les valeurs de  $Y$  ne sont pas classées par ordre croissant (sauf si  $\varphi$  est croissante).

## 2. LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

## 2.1. Définition.

**Définition 3.** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé (fini) et soit  $X$  une variable aléatoire sur cet espace. La loi de probabilité de  $X$  est la probabilité sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$P_X(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}).$$

En particulier on a :

$$P_X(]a, b]) = P(\{\omega \in \Omega, a < X(\omega) \leq b\})$$

ou bien

$$P_X(\{x\}) = P(\{\omega, X(\omega) = x\}).$$

Remarquons que  $P_X$  est bien une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$  (ou plus précisément sur un sous-ensemble fini  $\Omega_X$  de  $\mathbb{R}$ ).

Posons  $\Omega_X = \{x_1, \dots, x_N\}$ . Cette loi de probabilité  $P_X$  est entièrement déterminée par les couples  $(x_i, p_i)$  avec

$$p_i = P(X^{-1}(x_i)).$$

Notons que

$$p_1 + \dots + p_N = 1.$$

**Exemples.**

- (1) Une urne contient 3 boules, deux rouges et une blanche. On effectue trois tirages successifs et on note le rang d'apparition de la boule blanche. Ici  $\Omega = \{(r, r, b), (r, b, r), (b, r, r)\}$  correspondant au tirage des trois boules et la variable aléatoire

$$X : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

correspond au rang de la boule blanche. La loi de  $X$  est donc

$$P_X(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2/3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

On a aussi

$$p_1 = P(X^{-1}(1)) = p_2 = P(X^{-1}(2)) = p_3 = P(X^{-1}(3)) = 1/3.$$

- (2) On lance un dé deux fois successivement. Soit  $X$  la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres sortis. Ici

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}.$$

C'est un ensemble fini contenant 36 éléments. La variable aléatoire est la fonction

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$X((i, j)) = i + j$$

avec  $(i, j) \in \Omega$ . Ainsi  $X$  est à valeurs dans  $\{2, 3, \dots, 12\}$ . On a, par exemple,

$$P_X(2) = \frac{1}{36}.$$

Plus généralement la loi de probabilité de  $X$  vérifie

$$\begin{cases} P_X(k) = \frac{k-1}{36} & \text{si } 2 \leq k \leq 6 \\ P_X(k) = \frac{13-k}{36} & \text{si } 7 \leq k \leq 12 \end{cases}$$

**Remarque.** Rappelons que  $P(X = x)$  signifie  $P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\})$ . Soit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ . C'est un ensemble fini. Posons

$$A = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}.$$

Alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^N P(\{\omega_k\}).$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et soit  $A = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ . Alors

$$P_X([-\infty, x]) = P(A).$$

On en déduit bien que la donnée des valeurs  $P(X = x)$  détermine complètement la loi de  $X$ .

**Remarque.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  peuvent avoir la même loi de probabilité sans pour autant être égale. Considérons l'exemple suivant : On lance une pièce équilibrée et on considère le tirage pile ou face dont le résultat est 0 pour pile et 1 pour face.. On effectue trois lancers. Soit  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où pile apparaît et soit  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où face apparaît. On a  $\Omega = \{0, 1\}^3$ . Un résultat s'écrit  $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  avec  $\alpha_i = 0$  ou 1. Alors

$$P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Soit  $k$  un entier inférieur ou égal à 3. Notons par  $A_k$  le sous ensemble de  $\Omega$  défini par

$$A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\}.$$

Alors

$$P_X(\{k\}) = P(\{\omega, X(\omega) = k\}) = P(A_k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

De même

$$P_Y(\{k\}) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Les variables  $X$  et  $Y$  ont la même loi de probabilité.

## 2.2. La loi de Bernoulli, La loi binomiale.

**Définition 4.** (1) Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et soit  $p \in [0, 1]$ . On dit  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si

$$P_X(\{0\}) = p, \quad P_X(\{1\}) = 1 - p.$$

On note cette loi  $\mathcal{B}(1, p)$ .

(2) Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$  à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n\}$  et soit  $p \in [0, 1]$ . On dit  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si

$$P_X(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ . On note cette loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Comme  $X$  est fini, sa loi est bien déterminée dès que l'on connaît les probabilités des singletons  $\{k\}$ . On peut vérifier à titre d'exercice que si  $X$  suit la loi de binomiale  $\mathcal{B}(N, 1/2)$ , alors

$$P_X(\mathbb{R}) = P_X(\{0, 1, \dots, n\}) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^N C_N^k = 1.$$

La loi de Bernoulli correspond à une expérience à deux issues, succès et échec et  $p$  est la probabilité pour avoir un succès. La loi binomiale correspond au résultat de la somme de  $n$  expériences indépendantes, chacune d'elles suivant la loi de Bernoulli.

**Exemple.** Une machine-outil produit 1,2 % de pièces défectueuses. On contrôle quarante pièces prises au hasard (sachant qu'après inspection une pièce est remise avec les autres et peut éventuellement être révérifiée). Quelle est la probabilité de contrôler deux pièces défectueuses? On a ici

$$n = 40, \quad p = 0,012, \quad k = 2.$$

D'où

$$P_X(k) = P(X = 2) = \binom{2}{40} (0,012)^2 (0,988)^{38} = 0,071.$$

## 3. FONCTION DE RÉPARTITION, ESPÉRANCE, ÉCART-TYPE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

### 3.1. Fonction de répartition.

Rappelons la convention :

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}.$$

**Définition 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction numérique

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On peut voir facilement que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
- (2) Pour tout  $x$ ,  $0 \leq F(x) \leq 1$
- (3)  $F$  est une fonction croissante.

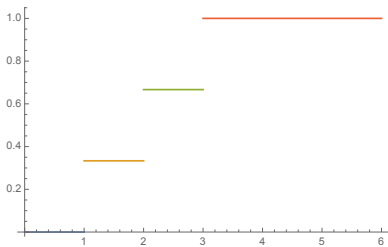
Soit  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Posons

$$P_X(\{x_i\}) = p_i.$$

Alors la fonction de répartition  $F_X$  est une fonction en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux, croissante vérifiant

- (1)  $F_X(x) = 0$  pour tout  $x < x_1$ ,
- (2)  $F_X(x) = p_1 + \dots + p_i$  pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}[$
- (3)  $F_X(x) = 1$  pour tout  $x \geq x_N$

Elle est discontinue pour  $x = x_1, \dots, x_N$ , le saut de discontinuité est égal à  $p_i$  en chacun de ces points  $x_i$ . Le graphe d'une fonction de répartition ressemble à :



**Exemple.** La loi de Dirac. Une variable aléatoire  $X$  sur l'espace  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  suit la loi de Dirac d'indice  $a \in \mathbb{R}$  si

$$X(\omega_i) = a$$

pour tout  $i = 1, \dots, n$ . La Fonction de répartition vérifie donc

$$\begin{cases} F_X(x) = 0, & \text{si } x < a, \\ F_X(x) = 1, & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

**3.2. Espérance mathématique.** Soit  $X$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs  $x_1 < \dots < x_N$ .

**Définition 6.** On appelle *espérance mathématique* de  $X$  (ou parfois *valeur moyenne* de  $X$ ), le nombre réel, noté  $E(X)$  défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^s x_i p_i$$

où  $p_i = P(X = x_i)$ .

Cette définition d'espérance se généralise en considérant les moments d'ordre  $k$  :

**Définition 7.** On appelle *moment d'ordre*  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ ), de  $X$ , le nombre réel, noté  $m_k$  défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^s x_i^k p_i$$

où  $p_i = P(X = x_i)$ .

On a donc

$$E(X) = m_1(X).$$

L'espérance s'interprète donc comme l'abscisse du centre de gravité des masses  $p_1, \dots, p_s$  et le moment d'ordre 2 comme un moment d'inertie de l'ensemble de ces masses.

**Théorème 1.** On a

(1)  $m_k(X) = E(X^k)$ ,

(2) Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires sur  $\Omega$  de même loi, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y),$$

(3) si  $a, b$  sont deux réels, alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

(4) Si  $X$  et  $Y$  sont de plus **indépendantes**, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Démonstration.*

(1) La première propriété découle directement de la définition du moment d'ordre  $k$ .

(2) Les variables  $X$  et  $Y$  ont la même loi de probabilité. Ceci signifie que  $X$  prend les valeurs  $x_1 < \dots < x_N$  et  $Y$  prend les valeurs  $y_1 < \dots < y_N$  avec

$$P(X = x_i) = P(Y = y_i) = p_i.$$

Ainsi

$$E(X + Y) = \sum_{i=1}^N (x_i + y_i) p_i = \sum_{i=1}^N x_i p_i + \sum_{i=1}^N y_i p_i = E(X) + E(Y).$$



(3) On suppose que le scalaire  $b$  est la variable aléatoire qui fait correspondre à tout élément de  $\omega$  la valeur  $b$ . Alors

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^N (ax_i + b)p_i = a \sum_{i=1}^N x_i p_i + b \sum_{i=1}^N p_i = aE(X) + b.$$

(4) Si maintenant les variables  $X$  et  $Y$  sont de plus supposées indépendantes, alors les valeurs de  $XY$  sont les scalaires  $x_i y_j$  avec  $1 \leq i, j \leq s$ . Comme

$$P(XY = x_i y_j) = p_i p_j,$$

alors

$$E(XY) = \sum_{i,j=1}^N x_i y_j p_i p_j = \sum_{i=1}^N x_i p_i \sum_{j=1}^N y_j p_j = E(X)E(Y).$$

### Exemples.

(1) L'espérance d'une variable de Dirac de paramètre  $a$  est

$$E(X) = a.$$

(2) L'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre  $p$  est

$$E(X) = p.$$

**3.3. Variance, écart-type.** Soit  $X$  une variable aléatoire et  $E(X)$  son espérance. Considérons la nouvelle variable

$$Z = X - E(X)$$

où  $E(X)$  est considérée comme la variable aléatoire

$$E(X)(\omega) = E(X)$$

pour tout  $\omega \in \Omega$ . Cette variable  $Z$  est appelée l'écart de  $X$ .

**Définition 8.** On a

(1) On appelle variance de  $X$  l'espérance de la variable écart  $Z^2 = (X - E(X))^2$ . On la note  $V(X)$  et donc

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

(2) On appelle écart-type de  $X$  le scalaire  $\sigma(X)$  défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

On montre facilement

**Théorème 2.** On a

$$V(X) = E((X - m_1)^2) = e(X^2) - (E(X))^2$$

et donc

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

### Exemples.

- (1) La variance et l'écart-type d'une variable de Dirac de paramètre  $a$  est nul :

$$V(X) = 0.$$

- (2) La variance et l'écart-type d'une variable de Bernoulli de paramètre  $p$  est

$$V(X) = p(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}.$$

- (3) Une variable aléatoire suit la loi binomiale  $B(p, q, n)$  si les valeurs de  $X$  sont  $\{0, 1, \dots, n\}$  et si la probabilité pour que  $X = k$  est

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Dans ce cas

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

# EXERCICES

*Exercice 1.* Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On en tire deux sans remise.

- (1) On note par  $X$  le plus grand des deux nombres obtenus. Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- (2) On note par  $Y$  le plus petit des deux nombres obtenus. Quelle est la loi de probabilité de  $Y$  ?

*Exercice 2.* On lance un dé deux fois successivement. On s'intéresse à la somme des chiffres obtenue après ces deux lancers.

- (1) Décrire l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .
- (2) Définir la variable aléatoire  $X$  associée à cette expérience.
- (3) Calculer  $X^{-1}(]-\infty, 8])$  et  $X^{-1}([3, 1, 9, 2])$ .
- (4) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .

*Exercice 3.* On considère le lancer d'un dé.

- (1) Décrire l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ .
- (2) On considère l'application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $X(\omega) = 1$  si  $\omega$  est impair, sinon  $X(\omega) = 0$ . Montrer que  $X$  est une variable aléatoire.
- (3) Quelle est sa fonction de répartition.

*Exercice 4.* On lance un dé deux fois successivement. Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer.

- (1) Déterminer la loi de  $X$ .
- (2) Déterminer la loi de  $X^2$

*Exercice 5.* On lance deux dés à la fois. Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des chiffres apparus.

- (1) Déterminer la loi de  $X$ .
- (2) Calculer son espérance.

*Exercice 6.* Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

*Exercice 7.* On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[n, m]$ ,  $m, n$  entiers, si  $X(\Omega) = [m, n]$  et

$$P(X = k) = \frac{1}{n - m + 1}, \quad k \in [m, n].$$

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de  $X$ .

*Exercice 8.* On lance un dé équilibré. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la face supérieure. Montrer que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[1, 6]$ . Quel est son écart-type ?