

ENSISA 1ère année  
Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique  
Elisabeth REMM

*Chapitre 3*

# Transformation de Fourier

---

## CONTENTS

1. Transformée de Fourier	1
1.1. Définition	2
1.2. Exemple.	2
1.3. Transformée de Fourier classiques	3
2. Propriétés de la transformée de Fourier	3
2.1. Linéarité de la transformation de Fourier	3
2.2. Dérivabilité de $\hat{f}$	3
2.3. Autres propriétés	4
2.4. Produit de convolution	5
3. Formules de réciprocité de Fourier	5
4. Théorème de Plancherel: généralisation de la transformation de Fourier à des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$	6
5. Formules de Parseval et de Plancherel	6
6. Applications	7

### Introduction:

Le son est de nature ondulatoire. Il correspond à une vibration qui se propage dans le temps. Pourtant, quand on écoute un instrument de musique, on n'entend pas une vibration (fonction du temps), mais une note, c'est-à-dire une fréquence. Notre oreille a donc pesé le poids relatif de chaque fréquence dans le signal temporel : elle a calculé la transformée de Fourier du signal original.

La transformée de Fourier permet aussi de résoudre des équations différentielles ou des équations de convolution, qu'elle transforme en équations algébriques.

### 1. TRANSFORMÉE DE FOURIER

La transformation de Fourier est une sorte d'analogue au développement en série de Fourier (sous sa forme complexe) d'une fonction  $T$ -périodique.

### 1.1. Définition.

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  est convergente) On appelle transformée de Fourier de  $f$  et on note  $\hat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx$$

Ainsi la transformation de Fourier ne s'applique qu'à une catégorie restreinte de fonctions: de nombreuses fonctions usuelles, par exemple  $f(x) = x$ ,  $f(x) = \sin x$  ou  $f(x) = e^x$  ne sont pas transformable au sens de Fourier du fait que l'intégrale de Fourier associée diverge en  $+\infty$  ou  $-\infty$ . L'hypothèse  $f \in L^1(\mathbb{R})$  signifie donc que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

est convergente. Cela implique que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx$$

converge normalement et donc la transformée de Fourier de  $f$  existe. De plus, la convergence normale implique que  $\hat{f}$  est continue.

La transformée de Fourier existe pour certaines fonctions n'appartenant pas à  $L^1(\mathbb{R})$  par exemple la fonction  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$  par contre

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx$$

est convergente donc la transformée de Fourier de  $f$  est bien définie.

On pourrait aussi montrer qu'il existe des fonctions  $f$  qui ont une transformée de Fourier  $\hat{f}$  mais dont la transformée de Fourier de  $\hat{f}$  n'existe pas (l'intégrale généralisée correspondante est divergente) et en particulier des fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  dont la fonction  $\hat{f}$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Cet espace n'est donc pas stable par la transformation de Fourier. Cependant, si l'on prend la fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  on récupère des propriétés sur la fonction  $\hat{f}$  telles que:

**Théorème 1.** Si  $f$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $\hat{f}$  est continue et bornée.

**1.2. Exemple.** Calculons la transformée de Fourier de la fonction triangle:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de  $f$  est

$$\mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} dx = \int_{-1}^0 (1+x) e^{-ixt} dx + \int_0^1 (1-x) e^{-ixt} dx.$$

On a, pour tout  $t \neq 0$ , en intégrant par parties,

$$\int_{-1}^0 (1+x) e^{-ixt} dx = \left[ (1+x) \frac{e^{-ixt}}{-it} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{it} \int_{-1}^0 e^{-ixt} dx = \frac{-1}{it} + \frac{1}{it} \left[ \frac{e^{-ixt}}{-it} \right]_{-1}^0 = \frac{-1}{it} + \frac{1 - e^{it}}{t^2}$$

et

$$\int_0^1 (1-x)e^{-ixt} dx = \left[ (1-x) \frac{e^{-ixt}}{-it} \right]_0^1 - \frac{1}{it} \int_0^1 e^{-ixt} dx = \frac{1}{it} - \frac{1}{it} \left[ \frac{e^{ixt}}{-it} \right]_0^1 = \frac{1}{it} - \frac{e^{it} - 1}{t^2}$$

d'où

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{2 - 2 \cos(t)}{t^2} = \frac{2(1 - \cos(2\frac{t}{2}))}{t^2} = \frac{4 \sin^2(\frac{t}{2})}{t^2}.$$

De plus pour  $t = 0$  on trouve  $\mathcal{F}(f)(t)$  et c'est la limite quand  $t$  tend vers 0 de la fonction que l'on a trouvée précédemment donc on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{2 - 2 \cos(t)}{t^2} = \frac{2(1 - \cos(2\frac{t}{2}))}{t^2} = \frac{4 \sin^2(\frac{t}{2})}{t^2}$$

(en considérant cette fonction comme prolongée par continuité en 0).

### 1.3. Transformée de Fourier classiques.

fonction $f$ (variable $x$ )	trans. de Fourier $\hat{f}$ (variable $t$ )
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2+t^2}$
$e^{-ax^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si }  x  \leq L \\ 0 & \text{si }  x  > L \end{cases}$	$2 \frac{\sin(Lt)}{t}$

pour  $a > 0$ .

## 2. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

**2.1. Linéarité de la transformation de Fourier.** La transformée de Fourier est linéaire: Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On a

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g).$$

**2.2. Dérivabilité de  $\hat{f}$ .** D'après les résultats rappelés au chapitre 1 sur les fonctions définies par des intégrales, si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ixt} f(x) dx$$

converge uniformément, par exemple si  $x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $\hat{f}$  est dérivable et on a

$$\hat{f}'(t) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ixt} f(x) dx.$$

Plus généralement, si  $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est  $n$ -fois dérivable et

$$\hat{f}^{(n)}(t) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ixt} f(x) dx.$$

**Théorème 2.** Si  $f$  est de classe  $C^1(\mathbb{R})$  (dérivable et de dérivée continue) et  $f$  et  $f'$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $\widehat{f}$  vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

et on peut en déduire que

$$\widehat{f}'(t) = it\widehat{f}(t)$$

et aussi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{f}(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \widehat{f}(t)$$

(Dérivation dans le domaine fréquentiel)

Les propriétés pour la fonction  $\widehat{f}$  s'obtiennent par intégration par parties

$$\widehat{f}'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixt} dx = [e^{-ixt} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + it \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt} dx$$

d'où

$$\widehat{f}'(t) = it\widehat{f}(t)$$

. Ceci entraîne que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{f}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\widehat{f}'(t)}{it} = 0$$

car la fonction  $\widehat{f}'(t)$  est bornée.

**2.3. Autres propriétés.** On a le tableau suivant

$f$ (variable $x$ )	$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ (variable $t$ )
$f(x)e^{i\alpha x}$	$\widehat{f}(t - \alpha)$
$f(x - \alpha)$	$e^{-it\alpha} \widehat{f}(t)$
$(-ix)^n f(x)$	$\widehat{f}^{(n)}(t)$
$f^{(p)}(x)$	$(it)^p \widehat{f}(t)$
$f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$	$ \lambda  \widehat{f}(\lambda t)$

Pour tout  $f$  de  $L_1(\mathbb{R})$  la fonction  $\widehat{f}$  est continue et tend vers 0 en l'infini.

On dit que la transformée de Fourier échange la régularité et la décroissance en l'infini.

Remarque: Il est possible de choisir une définition alternative pour la transformation de Fourier. Ce choix est une affaire de convention dont les conséquences ne se manifestent (en général) que par des facteurs multiplicatifs constants. Par exemple, certains utilisent :

$$\mathcal{F}_1(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

ou encore

$$\mathcal{F}_2(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x \xi} f(x) d\xi.$$

On aura par exemple

$$\mathcal{F}_2(f(x)e^{iax})(\xi) = \mathcal{F}_2(f)\left(\xi - \frac{a}{2\pi}\right)$$

**2.4. Produit de convolution.** On appelle produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$ , la fonction

$$h = f \star g$$

définie par

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

sous réserve de convergence de l'intégrale introduite.

Grâce au changement de variable  $u = t - u$ , on montre que

$$f \star g = g \star f.$$

**Théorème 3.** *Effet de la transformée de Fourier sur le produit de convolution de fonctions*  
Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $f \star g$  leur produit de convolution

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

### 3. FORMULES DE RÉCIPROCITÉ DE FOURIER

Sous certaines conditions, il est possible d'inverser la transformée de Fourier, c'est à dire de retrouver  $f$  en connaissant  $\widehat{f}$ .

**Théorème 4.** *Si  $f$  et  $\widehat{f}$  sont toutes deux dans  $L^1(\mathbb{R})$ , on pose*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \widehat{f}(t) dt$$

Alors  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f = g$  presque partout.

Donc deux fonctions intégrables qui ont même transformée de Fourier sont égales presque partout. Dire que deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^1(\mathbb{R})$  sont égales presque partout signifie que l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable (de mesure nulle pour la longueur dans  $\mathbb{R}$ ). Par exemple un point, une famille finie de points sont des ensembles négligeables. Si  $f$  et  $g$  sont différentes sur un ensemble de mesure nulle, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f-g)(x)| dx = 0.$$

**Remarques.**

- (1) Soit  $f$  une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier existe. Mais celle-ci n'est pas forcément intégrable. Le théorème de réciprocité ci-dessus n'a de sens que lorsque  $f$  et  $\widehat{f}$  admettent des transformées de Fourier. On peut donc supposer en particulier que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .
- (2) Supposons que  $f$  soit continue par morceaux avec des points de discontinuité de première espèce et que la transformée de Fourier de  $f$  existe:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt} dx.$$

Dans ce cas, le théorème ci-dessus s'écrit: si la transformée de Fourier de  $\widehat{f}$  existe, alors

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{itx} dt$$

Lorsque  $f$  et  $\mathcal{F}(f)$  sont absolument intégrables sur  $]-\infty, +\infty[$  et lorsque  $f$  est continue on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{itx} dt.$$

- (3) Autre cas particulier intéressant: Si  $f$  est deux fois dérivable avec la dérivée et la dérivée seconde continues, si de plus  $f, f', f''$  sont intégrables, alors l'inversion de la transformée de Fourier est possible et on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t) e^{itx} dt.$$

#### 4. THÉORÈME DE PLANCHEREL: GÉNÉRALISATION DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER À DES FONCTIONS DE $L^2(\mathbb{R})$

L'espace  $L^1(\mathbb{R})$  n'est pas forcément le meilleur cadre pour définir la transformée de Fourier, car  $L^1(\mathbb{R})$  n'est pas stable par la transformée de Fourier. On préfère souvent l'étudier sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

Mais on ne peut pas en général définir la transformée de Fourier d'une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  (fonction dont  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$  CV) par la formule usuelle car l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$  n'a pas de raison d'exister pour une fonction quelconque de  $L^2(\mathbb{R})$ . On peut néanmoins définir la transformée de Fourier-Plancherel de  $f$  par le théorème suivant :

**Théorème 5.** *Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour  $A > 0$ , on définit :*

$$\varphi_A(f)(x) = \int_{-A}^A f(t) e^{-ixt} dt$$

Alors,  $\varphi_A(f)$  converge dans  $L^2(\mathbb{R})$  quand  $A$  tend vers l'infini vers une fonction  $F(f)$  qu'on appelle transformée de Fourier-Plancherel de  $f$ .

En outre, si  $f$  est dans  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors  $F(f)$  coïncide avec la transformée de Fourier usuelle de  $f$ .

#### 5. FORMULES DE PARSEVAL ET DE PLANCHEREL

Les fonctions couramment utilisées dans la transformation de Fourier sont des fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$  mais aussi de carré intégrable, c'est-à-dire que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$  est convergente (le module est inutile si  $f$  est réelle). On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx$$

(formule de Parseval)

Plus généralement on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \overline{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) \cdot \overline{\mathcal{F}(g)}(x) dx$$

(formule de Plancherel)

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \bar{g}(t) dt$  définit sur l'espace des fonctions transformables au sens de Fourier un produit scalaire hermitien qui à un coefficient  $\frac{1}{2\pi}$  près, se conserve dans la transformation de Fourier

## 6. APPLICATIONS

Les propriétés de la **transformée de Fourier** notamment celles concernant la dérivation de  $f$  et la translation sont à l'origine d'**applications de la transformation de Fourier** à des **équations fonctionnelles**, c'est-à-dire où l'inconnue est un fonction; en particulier, **équations aux dérivées partielles**, par exemple le **problème des cordes vibrantes**.

**Pour les équations différentielles**, on utilise plus couramment la **transformation de Laplace**, valable dans des hypothèses plus larges.

La transformation de Fourier est utilisée en physique et en théorie des signaux

On a vu qu'il est possible de choisir une définition alternative pour la transformation de Fourier. Par exemple

$$\mathcal{F}_2(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega t} f(t) dt$$

avec  $f$  un signal donné en fonction du temps  $t$  en secondes et  $\omega$  la fréquence donnée en Herz. La représentation temporelle peut être suffisante dans les cas où la forme du signal et la nature du traitement restent simples. Dans la réalité, les signaux n'ont pas toujours une forme simple soit en raison de la nature de l'information qu'ils portent, soit en raison du traitement qu'ils doivent subir. L'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet plus d'interpréter correctement l'information. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile. La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet d'établir une dualité entre deux représentations différentes d'un signal mais complémentaires au niveau de l'interprétation des résultats. Elle effectue le passage du domaine temporel au domaine spectral (fréquentiel). Son résultat est appelé spectre d'un signal.

## Exercices

**Exercice 1** Démontrer, grâce au calcul direct intégral, les transformées de Fourier suivantes:

$$(1) \mathcal{F}(e^{-a|x|})(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$$

$$(2) \mathcal{F}(e^{-ax^2})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

$$(3) \text{ pour } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq L \\ 0 & \text{si } |x| > L \end{cases} \text{ on a } \mathcal{F}(f)(t) = 2 \frac{\sin(Lt)}{t}$$

où  $a$  et  $L$  sont des réels strictement positifs.

**Exercice 2** Soit  $k$  une constante fixée,  $f$  une fonction donnée de  $L^1(\mathbb{R})$ . On cherche les fonctions  $y \in L^1(\mathbb{R})$  vérifiant l'équation fonctionnelle

$$y(t) - k[y(t+1) - y(t-1)] = f(t).$$

- (1) Transformer cette équation par la transformation de Fourier
- (2) En déduire la transformée  $\widehat{y}$
- (3) En déduire l'expression de  $y$  sous forme d'une intégrale.
- (4) Quelle condition doit vérifier  $k$ ?

**Exercice 3** On va utiliser les transformées de Fourier calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2 + t^2} dt,$$

où  $\alpha$  est un réel positif.

- (1) Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$
- (2) Montrer que la fonction  $f$  vérifie la formule d'inversion
- (3) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2 + t^2} dt.$$

**Exercice 4** Trouver la transformée de Fourier de la fonction  $xe^{-a|x|}$

**Exercice 5** Résoudre à l'aide des transformation de Fourier l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec un second membre  $f$  supposée dans  $L^1(\mathbb{R})$  et  $w \in \mathbb{R}^*$ :

$$-\frac{1}{w^2}g'' + g = f$$



### Corrigé des exercices

**Exercice 2.** Soit  $k$  une constante fixée,  $f$  une fonction donnée de  $L^1(\mathbb{R})$ . On cherche les fonctions  $y \in L^1(\mathbb{R})$  vérifiant l'équation fonctionnelle

$$y(t) - k[y(t+1) - y(t-1)] = f(t).$$

(1) Transformer cette équation par la transformation de Fourier

Compte tenu de la linéarité et de la formule de transformée d'une fonction translatée, on a

$$\widehat{y}(x) - k[e^{-ix}\widehat{y}(x) + e^{ix}\widehat{y}(x)] = \widehat{f}(x)$$

(2) En déduire la transformée  $\widehat{y}$

$$\widehat{y}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{1 - 2k \cos x}$$

(3) En déduire l'expression de  $y$  sous forme d'une intégrale. D'après la formule d'inversion, on a

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(x)}{1 - 2k \cos x} e^{itx} dx$$

(4) Quelle condition doit vérifier  $k$ ? Le dénominateur doit être différent de 0. Pour  $k = 0$  c'est le cas. Pour  $k \neq 0$  on a  $1 - 2k \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2k}$ . Si  $\frac{1}{2k} > 1$  il n'y aura pas de valeur de  $x$  annulant le dénominateur. Cela correspond à  $k > 0$  et  $k < \frac{1}{2}$ . De même si  $\frac{1}{2k} < -1$  il n'y aura pas de valeur de  $x$  telle que le dénominateur s'annule. Cela correspond à  $k < 0$  et  $k > -\frac{1}{2}$ . Réciproquement si  $k \leq -\frac{1}{2}$  ou  $k \geq \frac{1}{2}$ , le dénominateur s'annule pour certaines valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  et l'intégrale n'est pas définie. Ainsi la condition que doit vérifier  $k$  est

$$k \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

La fonction  $y$  sera alors définie par exemple si  $\frac{\widehat{f}(x)}{1 - 2k \cos x}$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Exercice 4** Trouver la transformée de Fourier de la fonction  $xe^{-a|x|}$  avec  $a > 0$ .

On sait que

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}.$$

De plus

$$\mathcal{F}(xf(x))(t) = i\widehat{f}'(t)$$

d'où

$$\mathcal{F}(xe^{-a|x|})(t) = i \times 2a \times \frac{-2t}{(a^2 + t^2)^2} = \frac{-4iat}{(a^2 + t^2)^2}$$

**Exercice 5** Résoudre à l'aide des transformation de Fourier l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec un second membre  $f$  supposée dans  $L^1(\mathbb{R})$  et  $w \in \mathbb{R}^*$ :

$$-\frac{1}{w^2}g'' + g = f$$

On va chercher une solution  $g$  qui On applique formellement la transformée de Fourier qui est linéaire:

$$-\frac{1}{w^2}\widehat{g}''(t) + \widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)$$

d'où, en utilisant la propriété de dérivation (en fréquence)

$$-\frac{1}{w^2}(it)^2\widehat{g}(t) + \widehat{g}(t) = \left(\frac{t^2}{w^2} + 1\right)\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t)$$

ou encore

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{w^2}}\widehat{f}(t) = \frac{w^2}{w^2 + t^2}\widehat{f}(t)$$

On va faire apparaître  $\frac{w^2}{w^2+t^2}$  comme la transformée de Fourier d'une fonction  $h$ :

$$\frac{w^2}{w^2 + t^2} = \frac{|w|^2}{|w|^2 + t^2} = \frac{|w|}{2} \frac{2|w|}{|w|^2 + t^2}$$

et on a

$$\widehat{h}(t) = \frac{|w|}{2} \frac{2|w|}{|w|^2 + t^2} \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{|w|}{2} e^{-|w||x|}.$$

Ainsi

$$\widehat{g}(t) = \widehat{h}(t)\widehat{f}(t) = \widehat{h \star g}(t).$$

Finalement

$$g(x) = \frac{|w|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|w||x-t|} f(t) dt$$

est solution de l'équation différentielle.

**Exercice 3.** On va utiliser les transformées de Fourier pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2 + t^2} dt,$$

où  $\alpha$  est un réel positif.

- (1) Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$

On a  $\widehat{f}(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$

- (2) Montrer que la fonction  $f$  vérifie la formule d'inversion.

Montrons que la fonction  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $|\widehat{f}(t)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$ . Or  $\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2} \sim_{+\infty} 2\alpha \frac{1}{t^2}$  et puisque  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}$  est CV (intégrale de Riemann CV car  $2 > 1$ ). On a le même résultat pour  $-\infty$ . Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(t)| dt \text{ est convergente}$$

et  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Comme de plus  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + t^2} dt = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\alpha^2 + t^2} dt$$

- (3) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2 + t^2} dt.$$

On a  $e^{ixt} = \cos(xt) + i\sin(xt)$ . Comme  $\sin$  est une fonction impaire ( $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ ) et la fonction  $g$  définie par  $g(t) = \frac{1}{\alpha^2+t^2}$  est paire, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) \frac{1}{\alpha^2 + t^2} dt = 0.$$

Comme  $\cos$  est une fonction paire ( $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ ) et la fonction  $g$  paire, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \frac{1}{\alpha^2 + t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \cos(xt) \frac{1}{\alpha^2 + t^2} dt.$$

On a donc