Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1-Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

0.1cm

EXERCICES - Chapitre 8

Produit scalaire, produit vectoriel, isométries dans $\mathbb{R}^3$

Dans toutes cette feuille, les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont repérés par leur base orthonormée canonique.

Exercice 1.

(1) Calculer le produit scalaire des vecteurs $(2, 3, -1)$ et $(5, -4, 2)$

(2) Déterminer k afin que les vecteurs $(1, k, 3)$ et $(2, 1, 5)$ soient orthogonaux.

(3) Soit $\overrightarrow{X} = (2, 1, -1)$. Calculer sa norme $||\overrightarrow{X}||$.

(4) Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit la distance $d(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ de la façon suivante

$$d(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = ||\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}||.$$

Calculer cette distance pour $\overrightarrow{X} = (1, 5, -2)$ et $\overrightarrow{Y} = 6, -1, -3)$.

Exercice 2. On considère les deux droites vectorielles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation

$$\mathcal{D}_1 : 2x - y = 0, \quad \mathcal{D}_2 : x + 2y = 0.$$

Quelles sont les équations des bissectrices des angles de ces deux droites.

Exercice 3. Soient A et B deux points du plan tels que $OA = OB = 1$ et d'angles polaires respectifs $a = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA})$ et $b = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OB})$. Calculer de deux manières différentes $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ et retrouver la formule classique donnant le développement de $\cos(a - b)$.

Exercice 4. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations

$$2x + 3y + z = 0,$$

$$3x - y - 3z = 0$$

sont perpendiculaires.

Exercice 5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$2x + 2y - z = 0.$$

(1) Déterminer l'angle de $\mathcal{P}$ avec l'axe $\overrightarrow{Oz}$ (c'est l'angle d'un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{Oz}$)

(2) Déterminer l'angle de $\mathcal{P}$ avec la droite d'équation $x = y = z$.

Exercice 6. Soient $A = (1, 2)$ et $B = (4, 1)$ deux points du plan $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'aire du triangle AOB ?

Exercice 7.

(1) Soient $A = (1, 5, 4)$ et $B = (-2, 3, -1)$ deux points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Quelle est l'aire du triangle AOB ?

(2) Soient $A = (1, 2, 3),\ B = (4, 1, 2),\ C = (2, 5, 1)$. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Exercice 8. On considère trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\overrightarrow{X} \wedge (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z})\overrightarrow{Y} - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})\overrightarrow{Z}.$$

Exercice 9. On considère les points $A = (1, 1, 0), B = (-1, 1, 0)$ et $C = (1, 2, 1)$.

(1) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

(2) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

Exercice 10. Montrer que la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer son inverse. Si f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ayant A comme matrice relative à la base canonique, caractériser cette isométrie.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on considère la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1} = (1,0), \overrightarrow{v_2} = (1,1)\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Est-elle orthonormée ?

(2) Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans la base canonique, puis dans $\mathcal{B}$.

(3) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4) Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit f une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. On considère une autre rotation vectorielle g. Montrer que $\{g(\overrightarrow{e_1}), g(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ($\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est la base canonique). Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ?

Exercice 13. Parmi les matrices suivantes, lesquelles représentent des isométries de $\mathbb{R}^3$?

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étudier les applications linéaires dont les matrices dans la base canonique sont

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

(1) Déterminer la matrice A relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. (On pourra déterminer la matrice de cette application dans une base orthonormée choisie puis on en déduira la matrice cherchée).

(2) On considère le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Déterminer la matrice A_2 relative à la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Que représente la transformation ayant pour matrice le produit $A_1 A_2$?

Exercice 16. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$. Déterminer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur ce plan.