UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 1 -Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES - Chapitre 7

L'espace vectoriel et euclidien $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(1) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 0\}$.

(2) $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 x_2 = 0\}$.

(3) $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \cos x_1 + 2e^{x_2} - x_3^2 = 0\}$.

(4) $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$.

Exercice 2

Soit $gl(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

(1) Rappeler sa structure d'espace vectoriel réel ainsi que sa dimension. En décrire une base.

(2) Soit $so(3)$ le sous-ensemble de $gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices vérifiant
$$M = -{}^tM.$$
Montrer que c'est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?

(3) Rappeler la notion de trace d'une matrice carrée. On considère le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle. Montrer que c'est un hyperplan vectoriel de $gl(n, \mathbb{R})$.

(4) Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Est-ce un sous- espace vectoriel ?

Exercice 3

Dans un espace vectoriel E à quatre dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$ de composantes
$$\overrightarrow{X_1} = (2, 1, 4, -3),\ \overrightarrow{X_2} = (1, -1, -1, -3),\ \overrightarrow{X_3} = (1, 2, 5, 0).$$

(1) Montrer que ces vecteurs sont linéairement dépendants et donner une relation par laquelle ils sont liés.

(2) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs et en donner une base.

(3) Compléter cette base pour obtenir une base de E

Exercice 4

Dans un espace vectoriel complexe à trois dimension rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on donne les vecteurs

$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{e_2} + i\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{e_3} + i\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{e_1} + i\overrightarrow{e_2}.$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base et trouver dans cette base les composantes du vecteurs $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 5

On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0,\ \text{et } x + z = 0\Big\}$$

(1) Donner une base de F.

(2) On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, 2, 3, 4),\ u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

(3) On pose G le sous-espace engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3, i.e $G = Vect\{u_1, u_2, u_3\}$. Quelle sa dimension ?

(4) Donner une base de $F \cap G$.

(5) En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

(6) Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et un élément de G ?

(7) Donner un supplémentaire de F. Est-il unique ?

Exercice 6

On considère dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} v_1 = (1, 2, 0, 1)\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (2, 2, 2, 2), \\ w_1 = (1, 2, 1, 0)\ w_2 = (-1, 1, 1, 1),\ w_3 = (2, -1, 0, 1),\ w_4 = (2, 2, 2, 2). \end{array}$$

(1) Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.

(2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3,

   (a) Déterminer une base de F.

   (b) Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.

(3) Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est liée.

(4) Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre.

(5) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4. Déterminer une base de G.

(6) Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$, définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

(1) Montrer que u est linéaire.

(2) On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ en fonction de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

(3) Écrire la matrice de u dans ces bases canoniques.

(4) Montrer que $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(5) Écrire la matrice de u dans les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, u(e_1), u(e_2)\}$.

Exercice 8

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par la donnée des images de vecteurs de base :

$$u(e_1) = w_1,\ u(e_2) = w_2,\ u(e_3) = w_3.$$

(1) a) Exprimer les vecteurs w_1, w_2, w_3 en fonction des vecteurs e_1, e_2, e_3. En déduire la matrice de u dans la base canonique.
b) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(v)$.

(2) Trouver une base de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

(3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 9

Chacune des matrices suivantes représente une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (p et n sont à préciser) donnée dans les bases canoniques associées. Déterminer le noyau et l'image pour chacun des cas (réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

(1) Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.

(2) Dérminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

(3) f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 11

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 12

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

(1) Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\{f'_1, f'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Donner la matrice de u dans les nouvelles bases.

Exercice 13

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 14

Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels F_1,F_2 et F_3 sont dits supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}$$

avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2$ et $\overrightarrow{X_3} \in F_3$.

(1) Soient F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 0)$, F_2 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ et F_3 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0, 2, 0)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.

(2) Soit F_4 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_4} = (1, 2, 1)$, F_5 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (1, 1, 0)$ et F_6 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0, 1, 1)$. Montrer que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i, j = 4, 5, 6$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 15 On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$

et

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$$

Déterminer une base de $F^\perp$ et de $G^\perp$.

Exercice 16 On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ le sous-espace vectoriel F défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Quelle est la dimension de F ?

(2) Déterminer le système d'équations de $F^\perp$

Exercice 17 On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille

$$\mathcal{F} = \{u = (1, 0, 1),\ v = (1, 1, 1),\ w = (-1, -1, 0).\}.$$

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
(2) Orthonormaliser, en suivant le procédé de Gram-Schmidt cette base.
(3) Soit $\mathcal{F}'$ la nouvelle base obtenue. Ecrire la matrice de changements de base de la base canonique à $\mathcal{F}'$. Vérifier que cette matrice est orthogonale.