FST Mulhouse.

Licence 1 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Rappels :Vecteurs. Géométrie vectorielle

Table des matières

1. Vecteurs dans l'espace

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions sur les vecteurs et calcul vectoriel vues dans la préparation au baccalauréat.

1.1. Coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace. Un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ dans l'espace est défini par la donnée d'une unité de mesure de longueurs et de trois axes Ox, Oy, Oz perpendiculaires deux à deux au point O.

Soit A un point de l'espace. On le projette parallèlement à Oz sur le plan Oxy. Soit B ce projeté. On notera par x_A et y_A les projetés de B sur Ox et Oy parallèlement à Oy et Ox et par z_A le projeté sur Oz de A parallèlement au plan Oxy. Alors (x_A, y_A, z_A) sont les coordonnées rectangulaires du point A. Ainsi à chaque point A on fait correspondre un et un seul triplet (x_A, y_A, z_A). Inversement, à chaque triplet (x, y, z) correspond un et un seul point de l'espace dont ce triplet représente les coordonnées rectangulaires.

1.2. Rappels sur les vecteurs. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace (ou du plan). Rappelons qu'il est caractérisé par

(1) sa direction (une droite)
(2) son sens
(3) et sa longueur notée $||\vec{u}||$.

On peut le représenter par une flèche (orientée). Tout couple ordonné de points (A, B) de l'espace définit un vecteur que l'on note $\overrightarrow{AB}$. Le point A s'appelle l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité. La distance entre A et B est la longueur de $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur (A, A) ou $\overrightarrow{AA}$ se notera $\overrightarrow{0}$ car sa longueur est nulle. Deux couples de bipoints (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur $\vec{u}$ s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On écrira alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}.$$

.

Proposition 1. *Etant donnés un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

Soient les points $A = (x_1, y_1, z_1)$ et $B = (x_2, y_2, z_2)$. Alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

1.3. Cosinus directeurs d'un vecteur. Considérons le vecteur $\overrightarrow{a} = (X, Y, Z)$ que l'on peut représenter par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ où A a pour composantes (X, Y, Z). Considérons les points A_x, A_y, A_z sur les axes Ox, Oy et Oz tels que

$$\overline{OA_x} = X,\ \overline{OA_y} = Y,\ \overline{OA_z} = Z.$$

On a alors

$$OA^2 = OA_x^2 + OA_y^2 + OA_z^2.$$

Ainsi

$$|\overrightarrow{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

et donc

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Soient

α l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Ox,

β l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Oy,

γ l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Oz.

On a alors

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

Définition 1. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *sont appelés les cosinus directeurs du vecteur* $\overrightarrow{a}$ *relatifs au repère fixé* $Oxyz$.

1.4. **Operations sur les vecteurs.**

1.4.1. *L'addition.* Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. On construit le vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ de la façon suivante : Soient A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Alors $\vec{a}+\vec{b}$ est égal à $\overrightarrow{OC}$ où $OABC$ est un parallélogramme. Cette construction correspond à la résultante de deux forces s'exerçant au point O.

En termes de composantes l'addition vérifie :

Proposition 2. *Soient* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *deux vecteurs de composantes* (X_a, Y_a, Z_a) *et* (X_b, Y_b, Z_b). *Alors*

$$\vec{a}+\vec{b} = (X_a + X_b, Y_a + Y_b, Z_a + Z_b).$$

L'addition vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}, \\ \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \\ \vec{a}-\vec{a} = \vec{0}, \\ \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Théorème 1. *Relation de Chasles. Soient* A, B, C *trois points. Alors*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Démonstration. Posons $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Alors

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) \\ \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3) \end{array}$$

D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} &= (b_1 - c_1 + c_1 - a_1, b_2 - c_2 + c_2 - a_2, b_3 - c_3 + c_3 - a_3), \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ &= \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

1.4.2. *Multiplication par un scalaire.* Soit $\vec{a}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$ un scalaire. Le vecteur $k\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{a}$, de longueur $|k||\vec{a}|$ et de même sens si $k > 0$ ou de sens inverse si $k < 0$.

Si $\vec{a} = (X, Y, Z)$ alors

$$k\vec{a} = (kX, kY, kZ).$$

Cette multiplication par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}, \\ (k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_1\vec{a}, \\ 0\vec{a} = \vec{0}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Remarque : Structure d'espace vectoriel. Si nous notons par E l'ensemble des vecteurs dans l'espace, les deux opérations que sont l'addition et la multiplication externe vérifiant les propriétés (1) et (2) munissent E d'une structure d'espace vectoriel réel. Nous développerons cette notion plus tard.

1.5. **Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.**

Définition 2. *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}.$$

Proposition 5. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls. Alors si $\vec{a} = (X_a, Y_a, Z_a)$ et $\vec{b} = (X_b, Y_b, Z_b)$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si*

$$\frac{X_a}{X_b} = \frac{Y_a}{Y_b} = \frac{Z_a}{Z_b}$$

dès que $X_b Y_b Z_b \neq 0$.

Démonstration. En effet $\vec{b} = k\vec{a}$ implique

$$X_b = kX_a, Y_b = kY_a, Z_b = kZ_a.$$

Si $X_B Y_b Z_b \neq 0$, on en déduit

$$\frac{X_a}{X_b} = \frac{Y_a}{Y_b} = \frac{Z_a}{Z_b}.$$

1.6. **Vecteurs coplanaires - Vecteurs linéairement indépendants.** Rappelons que trois points de l'espace A, B, C sont alignés s'il existe un scalaire k tel que

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

En particulier la droite (AB) est l'ensemble des points M tels qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}.$$

Considérons à présent trois points A, B, C non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe des scalaires $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ pour lesquels nous avons

$$\overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}.$$

On dira alors que la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est une base ou un repère du plan (ABC).

Définition 3. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires ou linéairement dépendants si les points A, B, C, D définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent à un même plan.*

Définition 4. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont dits linéairement indépendants si l'équation*

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{0}$$

implique

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

Ceci signifie que les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires. Cette notion de linéaire indépendance peut concerner également une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$: Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont dits linéairement indépendants si l'équation

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0}$$

implique

$$k_1 = k_2 = 0.$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ nous avons bien entendu une définition semblable :

Définition 5. *Deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont dits linéairement indépendants si l'équation*

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0}$$

implique

$$k_1 = k_2 = 0.$$

1.7. **Matrice et déterminant.** Une méthode bien pratique pour montrer que *deux* vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants ou non repose sur la notion de déterminants, notion que nous verrons en détail dans les chapitres suivants. Tout d'abord soient deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6. *On appelle matrice de ces deux vecteurs le tableau 2 lignes et 2 colonnes obtenu en mettant en colonne les composantes de chacun des vecteurs soit*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

On appelle Déterminant de cette matrice le scalaire

$$\det(M) = x_1y_2 - x_2y_1$$

(produit en croix).

On a le résultat suivant :

Théorème 2. *Deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

de ces deux vecteurs vérifie

$$\det(M) \neq 0.$$

Prenons par exemple les vecteurs $(1,1)$ et $(-1,2)$. La matrice de ces deux vecteurs est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$\det(M) = 1 \times 2 - (-1) \times 1 = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

donc les vecteurs sont indépendants. Considérons maintenant les vecteurs $(1,2)$ et $(2,4)$. La matrice de ces deux vecteurs est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$\det(M) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$$

donc les vecteurs sont dépendants.

Dans $\mathbb{R}^3$ nous avons une notion analogue.

Définition 7. *On appelle matrice de trois vecteurs* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$*, le tableau 3 lignes et 3 colonnes obtenu en mettant en colonne les composantes de chacun des vecteurs soit*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

On appelle Déterminant de cette matrice le scalaire

$$\det(M) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_3).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3. *Trois vecteurs* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement indépendant si et seulement si la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

de ces deux vecteurs vérifie

$$\det(M) \neq 0.$$

Reprenons les exemples ci-dessus. Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (1,0,1), \vec{w} = (0,1,1)$. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut

$$\det(M) = 1(0-1) - 1(1-0) + 0(1-0) = -1 - 1 + 0 = -2 \neq 0$$

et ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Considérons à présent les trois vecteurs $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,-1,0), \vec{w} = (2,0,1)$. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut

$$\det(M) = 1(-1-0) - 1(0+1) + 2(0+1) = -1 - 1 + 2 = 0$$

et ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Une règle pratique pour calculer le déterminant d'une matrice 3 lignes et 3 colonnes : la règle de Sarrus. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

On recopie les deux premières lignes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

et on ajoute tous les produits de trois facteurs alignés du Nord Ouest au Sud Est et on retranche les produits de trois facteurs alignés du Nord Est au Sud Ouest :

$$x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - (x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1).$$

1.8. **Bases de l'espace.**

Définition 8. *Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace linéairement indépendants définissent une base de l'espace.*

Par exemple les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ des trois axes de coordonnées définis au premier paragraphe forment une base de l'espace.

Théorème 4. *Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ une base de l'espace. Tout vecteur $\vec{a}$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{a} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w}.$$

Les scalaires x_1, x_2, x_3 s'appellent les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Cette notion de base est fortement utilisée en mécanique. Elle est appelée dans ce cas un repère de l'espace. Comme on vient de la voir, il existe une infinité de bases de l'espace. En mécanique, un des problèmes fondamentaux consiste au choix d'un bon repère (repère cylindrique, repère mobile,...).

2. Produit scalaire

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

où les x_i sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ donnée.

Définition 9. *On appelle produit scalaire euclidien dans l'espace vectoriel réel* $\mathbb{R}^3$*, l'application de* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Cette application a les propriétés suivantes : Pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \in \mathbb{R}^3$,

(1) $(\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2}) \cdot \overrightarrow{Y} = \alpha_1 (\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{Y}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X_2} \cdot \overrightarrow{Y})$,

(2) $\overrightarrow{X} \cdot (\alpha_1 \overrightarrow{Y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{Y_2}) = \alpha_1 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_2})$

Une telle application, a deux variables de $\mathbb{R}^3$, vérifiant les deux propriétés ci-dessus est appelée une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$. L'étude générale de telles applications sur un espace vectoriel réel ou complexe seront étudiées plus tard.

Quelques propriétés du produit scalaire euclidien

(1) Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3$. Alors l'identité

$$\forall \overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^3, \; \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$

implique $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration. En effet, posons $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$. Prenons dans un premier temps $\overrightarrow{Y} = \vec{i} = (1, 0, 0)$. Alors $\overrightarrow{X} \cdot \vec{i} = 0$ implique $x_1 = 0$. De même, en prenant $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{j}$ et $\vec{k}$, nous obtenons $x_i = 0$ et en déduisons $\overrightarrow{X} = 0$.

(2) Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3$ non nul

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} > 0.$$

En effet $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

(3) Le produit scalaire est commutatif :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{X}.$$

Lorsque nous considèrerons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire euclidien, nous parlerons alors de $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien.

Définition 10. *Dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$*, on appelle norme du vecteur* $\overrightarrow{X}$*, le scalaire*

$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}}.$$

Nous avons donc, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$,

$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

et la norme correspond à la longueur du vecteur.

Proposition 6. *(Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$, nous avons*

$$|\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}| \leq ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||$$

et

$$||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}|| \leq ||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||.$$

Nous remarquons que l'égalité pour ces deux relations n'a lieu que lorsque $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont colinéaires.

Remarque. Cas de $\mathbb{R}^2$ Il est clair que cette définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ se particularise aisément au cas du plan : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs du plan, alors

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Ces vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul.

Commençons par interpréter le produit scalaire dans le plan, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs du plan

$$\overrightarrow{X_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{X_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}.$$

Nous avons

$$\left| \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\| \left\|\overrightarrow{X_2}\right\|} \right| \leq 1.$$

En effet $(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leq (x_1+y_1)^2(x_2+y_2)^2$. Nous pouvons donc interpréter ce nombre comme le cosinus d'un angle, mais ceci nécessite que l'angle formé par les deux vecteurs de base soit un angle droit.

Ainsi, par définition

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{||\overrightarrow{X_1}||\ ||\overrightarrow{X_2}||}$$

et θ désigne l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ du plan.

Théorème 5. *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors*

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = ||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Y}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

où $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ désigne l'angle des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$.

3. Produit vectoriel, produit mixte dans $\mathbb{R}^3$

3.1. **Vecteur directeur d'un plan, produit vectoriel dans** $\mathbb{R}^3$**.** Nous pouvons toujours ramener la définition d'un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine comme l'ensemble des points $M = (x_1, x_2, x_3)$ ou des vecteurs $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation linéaire

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Cette équation n'est unique qu'à un coefficient multiplicatif près. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A} = (a, b, c)$ défini par cette équation. Alors l'équation linéaire correspond au produit scalaire

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Les éléments du plan $\mathcal{P}$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{A}$. Ce vecteur $\overrightarrow{A}$ s'appelle un vecteur directeur du plan, tout autre vecteur directeur s'écrit $\lambda\overrightarrow{A}$ avec $\lambda \neq 0$.

Détermination d'un vecteur directeur : le produit vectoriel Supposons que nous connaissions une base $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Un vecteur directeur est orthogonal à $\overrightarrow{X}$ et à $\overrightarrow{Y}$. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A}$ de composante $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. On vérifie aisément que

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0, \ \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Vérifions uniquement la première identité :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = 0.$$

Ainsi ce vecteur $\overrightarrow{A}$ est un vecteur directeur du plan de base $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$.

Définition 11. *Soient $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est le vecteur de composantes*

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nous avons démontré ci-dessus la propriété suivante

Proposition 7. *Si les vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ sont linéairement indépendants, alors $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. C'est dons un vecteur directeur de ce plan.*

Nous en déduisons aussi

Corollaire 1. *Les deux vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} \neq \overrightarrow{0}$.*

Démonstration. En effet, si $\overrightarrow{Y} = \lambda\overrightarrow{X}$, alors si nous calculons $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ nous trouvons bien le vecteur nul.

Lemme 1. *Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$, on a*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot Y)^2.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 \quad & = ((x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ & = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2(\overrightarrow{X} \cdot Y)^2 & \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\frac{||\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} + \frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1.$$

Or

$$\frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = \cos^2 \theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$. Ainsi

$$\frac{||\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

On en déduit

Proposition 8. *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. alors*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}|| = ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}|| \sin\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$.

Sur la base canonique, le produit vectoriel se comporte ainsi :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}, \\ \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}. \end{array}$$

Nous en déduisons les propriétés algébriques du produit vectoriel : pour tout $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in \mathbb{R}^3$

(1) $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = -\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{X}$,

(2) $\overrightarrow{X} \wedge (a\overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{Z}) = a\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Z}$,

(3) $(\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \wedge \overrightarrow{Z} + (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \wedge \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \wedge \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{0}$.

La dernière identité montre que le produit vectoriel n'est pas une opération associative.

3.2. **Le déterminant et le produit vectoriel.**

Rappelons que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

son determinant se calcule, par exemple, à l'aide de la règle de Sarrus

$$\begin{aligned} \det A = \ & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} \\ & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \end{aligned}$$

Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \ \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3), \ \overrightarrow{Z} = (z_1, z_2, z_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ces trois vecteurs est obtenue en mettant en colonne les composantes de ces trois vecteurs :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est

$$\det M = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + x_2y_3z_1 - z_2y_2x_3 - z_3y_3x_1 - y_1x_2z_3.$$

Nous pouvons l'écrire comme un produit scalaire :

$$\det M = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_3).$$

Rappelons que

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3).$$

Alors
$$\det M = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$
Notons que pour les mêmes raisons, nous aurons aussi
$$\det M = (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \cdot \overrightarrow{Y} = (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \cdot \overrightarrow{X}.$$
On prêtera attention à l'ordre d'écriture des vecteurs.

3.3. **Le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$.**

Définition 12. *On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$, le nombre*
$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}).$$

L'expression analytique de ce produit mixte est
$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$
On en déduit immédiatement
$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

De plus, d'après les résultats du paragraphe précédent, le produit mixte est égal au déterminant de la matrice des trois vecteurs $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$.

Proposition 9. *Le volume du parallélépipède supporté par trois vecteurs linéairement indépendants est égal en valeur absolue produit mixte de ces trois vecteurs.*

Nous supposons les trois vecteurs indépendants, sinon le parallélépipède serait un peu plat. Rappelons que le volume est égal au produit d'une base par la hauteur issue de cette base.

Remarque : Calcul de l'aire d'un parallélogramm

Plaçons à présent dans le plan. Considérons le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont supportés par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Son aire est égale à $AB \times CI$. Considérons la matrice
$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$
des deux vecteurs. Rappelons que son déterminant est $\det(M) = x_1y_2 - x_2y_1$. Si $\overrightarrow{Z}$ est le vecteur $\overrightarrow{Z} = (-y_2, y_1)$, alors
$$\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z} = 0,\ \det M = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}.$$
Mais $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z} = ||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Z}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z})$. Comme $\cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z}) = \cos((\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) + \pi/2) = -\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$, nous obtenons
$$\det M = -||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Y}|| \sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$
et donc
$$|\det M| = AB \times CD \times |\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})| = AB \times CI.$$
Ainsi

Proposition 10. *Le déterminant de deux vecteurs exprimés dans une base orthonormée est égal, en valeur absolue, à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*