FST Mulhouse.

Licence 1 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

*Chapitre 2*

# Systèmes Linéaires

Table des matières

1. Définition d'un système linéaire 1
1.1. Définitions et exemples 1
1.2. Matrice d'un système lnéaire 2
2. Résolution des systèmes linéaires 3
2.1. Systèmes linéaires équivalents 3
2.2. Méthode d'élimination 4
2.3. Méthode du pivot de Gauss 6
3. Structure de l'ensemble des solutions 8

Dans tout ce qui suit $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Lorsqu'on ne veut préciser dans lequel de ces deux corps on travaille, on écrira $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1. Définition d'un système linéaire

1.1. **Définitions et exemples.** On appelle système linéaire de $n$ équations linéaires à $p$ inconnues à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tout système de relations

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{array} \right.$$

Les éléments $a_{i,j}$ sont des scalaires donnés de $\mathbb{K}$ et dans la notation $a_{i,j}$, l'indice $i$ désigne la ligne où se situe ce coefficient et $j$ en désigne la colonne. Les seconds membres de ces équations sont les coefficients $b_i$, $i = 1, \cdots, n$ et ces coefficients sont aussi des scalaires donnés.

**Définition 1.** *On appelle solution dans $\mathbb{K}$ du système linéaire $(S)$, tout vecteur*

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$$

*dont les coordonnées satisfont les relations de $(S)$.*

**Exemples.**

(1) Le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + y & = 2 \\ x - y & = 1 \\ 2x + y & = 3 \end{cases}$$

est un système de 3 équations à 2 inconnues $x, y$ dont les coefficients sont réels.

(2) Toute équation linéaire à $p$ inconnues

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut être vue comme un système linéaire de 1 équation à $p$ inconnues.

**Définition 2.** *Un système linéaire $(S)$, est dit homogène lorsque tous les éléments du second membre sont nuls.*

Ainsi un système linéaire homogène de $n$ équations linéaires à $p$ inconnues à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'écrira

$$(S_h) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}^2x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}^2x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}^2x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = 0 \end{cases}$$

Par exemple le système linéaire

$$\begin{cases} 3x + y & = 0 \\ x - y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{cases}$$

est un système linéaire homogène. Notons qu'à tout système linéaire $(S)$ lui est attaché un unique système linéaire homogène construit en mettant à 0 tous les coefficients du second membre. Ainsi $(S_h)$ est le système linéaire homogène attaché à $(S)$.

1.2. **Matrice d'un système lnéaire.** Considérons le système linéaire

$$(S) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}^2x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}^2x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}^2x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

A ce système, on peut lui associer les deux tableaux

$$M(S) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le tableau rectangulaire $M(S)$ des coefficients $a_{i,j}$ est appelé la matrice du système $S$ et le tableau $B$ la matrice du second membre de $S$. Notons que $M(S)$ est un tableau de $n$ lignes et $p$ colonnes, son coefficient à la place "ligne $i$, colonne $j$ est $a_{i,j}$ et le second membre $(B)$ est un tableau $n$ lignes et 1 colonne. Il est clair que la données des matrices $M$ et $B$ permet de retrouver le système $(S)$.

**Exemples.**

(1) Soit le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x + y & = 2 \\ x - y & = 1 \\ 2x + y & = 3 \end{array} \right.$$

On aura

$$M(S) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Si le système linéaire est homogène , alors

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Résolution des systèmes linéaires

2.1. **Systèmes linéaires équivalents.** Soit le système linéaire

$$(S) = \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}^2 x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}^2 x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}^2 x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{array} \right.$$

Notons le schématiquement par

$$(S) = \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \cdots \\ L_n \end{array} \right.$$

où $L_i$ désigne la ligne numéro $i$ c'est-à-dire

$$L_i : \ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}^2 x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i.$$

**Définition 3.** *Nous dirons que deux systèmes linéaires à $p$ équations et $n$ inconnues sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.*

**Comment passer d'un système $(S)$ à un système équivalent $(S_1)$.**

(1) **Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul.** Ainsi $(S)$ est équivalent au système linéaire

$$(S_1) = \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \cdots \\ \beta L_i \\ \cdots \\ L_n \end{array} \right.$$

avec $\beta \neq 0$.

(2) **Echange de lignes.** Le système

$$(S) = \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{cases}$$

est équivalent au système

$$(S_2) = \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{cases}$$

(3) **Remplacement.** On remplace la ligne $L_i$ par la ligne $L_i + \alpha L_k$. On symbolisera cette opération par

$$L_i \to L_i + \alpha L_k.$$

Une combinaison des deux opérations (2) et (3) se traduit par

$$L_i \to \alpha_i L_i + \alpha_k L_k, \quad \alpha_i \neq 0.$$

Ainsi $(S)$ est équivalent au système

$$(S_2) = \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \alpha_i L_i + \alpha_k L_k \\ \cdots \\ L_n \end{cases}$$

mais avec $\alpha_i \neq 0$.

2.2. **Méthode d'élimination.** Cette méthode, appelée plus précisément méthode des éliminations successives consiste à utiliser une équation pour calculer une inconnue en fonction des autres puis de reporter le résultat obtenu dans les autres équations. On est ainsi amené à résoudre un nouveau système comportant une inconnue en moins et une équation en moins.

**Exemple.** Soit à résoudre le système

$$(S) = \begin{cases} x + 4y - 7z & = 5 \\ x + 3y - 5z & = -4 \\ 3x + 2y - z & = 9 \end{cases}$$

La première équation donne

$$x = -4y + 7z + 5$$

On reporte dans les autres équations

$$x+3y-5z=-4 \to -4y+7z+5+3y-5z=-4 \to -y+2z=-9$$

$$3x+2y-z=9 \to 3(-4y+7z+5)+2y-z=9 \to -10y+20z=-6.$$

Ainsi $(S)$ est équivalent au système

$$(S_1)=\begin{cases} x+4y-7z &= 5 \\ \quad -y+2z &= -9 \\ -10y+20z &= -6 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$y=2z+9$$

On reporte dans les autres équations :

$$x+4y-7z=5 \to x+4(2z+9)-7z=5 \to x+z=-31$$

$$-10y+20z=-6 \to -10(2z+9)+20z=-6 \to 0=84.$$

et $(S)$ est équivalent à

$$(S_2)\begin{cases} x+4y-7z &= 5 \\ \quad -y+2z &= -9 \\ \quad 0=84 & \end{cases}$$

La dernière équation de $(S_2)$ montre que ce système n'a pas de solution. Ainsi $(S)$ n'a pas de solutions.

**Exemple.** Soit à résoudre le système

$$(S)=\begin{cases} x+2y+2z &= 3 \\ 2x+3y+5z &= 10 \\ 3x+7y+4z &= 3 \end{cases}$$

La première équation donne

$$x=-2y-2z+3$$

On reporte dans les autres équations

$$2x+3y+5z=10 \to -4y-4z+6+3y+5z=10 \to -y+z=4$$

$$3x+7y+4z=3 \to 3(-2y-2z+3)+7y+4z=3 \to y-2z=-6.$$

Ainsi $(S)$ est équivalent au système

$$(S_1)=\begin{cases} x+2y+2z &= 3 \\ \quad -y+z &= 4 \\ \quad y-2z &= -6 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$y=z-4$$

On reporte dans les autres équations :

$$x+2y+2z=3 \to x+2(z-4)+2z=3 \to x+4z=11$$

$$y-2z=-6 \to z-4-2z=-6 \to --z=-2.$$

et $(S)$ est équivalent à

$$(S_2)\begin{cases} x+2y+2z &= 3 \\ \quad -y+z &= 4 \\ \quad -z &= -2 \end{cases}$$

Ce dernier système possède une unique solution $z = 2, y = -2, x = 3$. Ainsi l'ensemble des solutions de $(S)$ est

$$\mathcal{S}(S) = \{(3, -2, 2)\}.$$

On peut perdre ici un peu de temps en vérifiant que $(3, -2, 2)$ est bien une solution du système de départ.

2.3. **Méthode du pivot de Gauss.** La méthode du pivot de Gauss est une méthode pour transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre en utilisant les règles énoncées ci-dessus : échange de deux lignes. multiplication d'une ligne par un nombre non nul et remplacement.

**Méthode.** Elle consiste à sélectionner une équation qu'on va garder intacte, et dans laquelle on va privilégier une inconnue facile et éliminer cette inconnue dans toutes les autres équations. On appelle pivot la paire (équation, inconnue) choisie.

**Exemple.** Considérons le système précédent

$$(S) = \begin{cases} x + 4y - 7z & = 5 \\ x + 3y - 5z & = -4 \\ 3x + 2y - z & = 9 \end{cases}$$

Choisissons comme pivot la première équation et la variable $x$. On notera ce pivot $(1, 1)$ car dans la matrice associée cela correspond au coefficient placé en $(1, 1)$. Eliminons la variable $x$ dans la deuxième et troisième équation :

$$L_2 \to L_2 - L_1 \to (x + 3y - 5z) - (x + 4y - 7z) = -4 - 5 \to -y + 2z = -9$$

$$L_2 \to L_3 - 3L_1 \to (3x + 2y - z) - 3(x + 4y - 7z) = -4 - 15 \to -10y + 20z = -19.$$

On obtient le système équivalent

$$(S_1) = \begin{cases} x + 4y - 7z & = 5 \\ -y + 2z & = -9 \\ -10y + 20z & = -19 \end{cases}$$

On va choisir maintenant la variable $y$ dans la deuxième équation du nouveau système et éliminer $y$ dans la première et troisième équation. Le pivot est donc $(2, 2)$.

$$L_1 \to L_1 + 4L_2 \to x + 4y - 7z + 4(-y + 2z) = 5 - 36 \to x + z = -31$$

$$L_3 \to L_3 - 10L_2 \to -10y + 20z - 10(-y + 2z) = 81 \to 0 = -81.$$

On obtient le système équivalent

$$(S_2) = \begin{cases} x + z & = -31 \\ -y + 2z & = -9 \\ 0 & = -81 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible, le système n'a pas de solution.

**Exemple.** Soit à résoudre le système par la méthode du pivot :

$$(S) = \begin{cases} x + 2y + 2z & = 3 \\ 2x + 3y + 5z & = 10 \\ 3x + 7y + 4z & = 3 \end{cases}$$

Choisissons comme pivot la première équation et la variable $x$. On notera ce pivot $(1,1)$ car dans la matrice associée cela correspond au coefficient placé en $(1,1)$. Eliminons la variable $x$ dans la deuxième et troisième équation :

$$L_2 \to L_2 - 2L_1 \to 2x + 3y + 5z - 2(x + 2y + 2z) = 10 - 6 \to -y + z = 4$$

$$L_3 \to L_3 - 3L_1 \to 3x + 7y + 4z - 3(x + 2y + 2z) = 3 - 9 \to y - 2z = -6$$

Le système est équivalent à

$$(S_2) = \begin{cases} x + 2y + 2z & = 3 \\ -y + z & = 4 \\ y - 2z & = -6 \end{cases}$$

Choisissons le pivot en $(2,2)$. Eliminons $y$ dans les équations 1 et 3 :

$$L_1 \to L_1 + 2L_2 \to x + 2y + 2z + 2(-y + z) = 3 + 8 \to x + 4z = 11$$

$$L_3 \to L_3 + L_2 \to -y + z + (y - 2z) = -6 + 4 \to -z = -2$$

Le système est équivalent à

$$(S_2) = \begin{cases} x + 4z & = 11 \\ -y + z & = 4 \\ z & = 2 \end{cases}$$

On en déduit la solution :

$$z = 2, \ -y = 4 - z = 2, \ x = 11 - 4z = 3.$$

D'où

$$\mathcal{S}(S_2) = \mathcal{S}(S) = \{(3, -2, 2)\}$$

Le système possède une unique solution.

**Exemple.** Soit à résoudre le système par la méthode du pivot :

$$(S) = \begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ x - 2y + 2z & = -2 \\ x + y - z & = 1 \end{cases}$$

Nous allons choisir la variable $x$ comme variable pivot. Pour simplifier les calculs commençons par fair le changement de lignes entre $L_1$ et $L_2$, le coefficient du pivot sera donc égal à 1. On a donc le système

$$(S_2) = \begin{cases} x - 2y + 2z & = -2 \\ 3x + y - z & = 1 \\ x + y - z & = 1 \end{cases}$$

On prend pour pivot le couple $(1,1)$. On a donc les opérations

$$L_2 \to L_2 - 3L_1 \to 3x + y - z - 3(x - 2y + 2z) = 1 + 6 \to 7y - 7z = 7$$

$$L_3 \to L_3 - L_1 \to x + y - z - (x - 2y + 2z) = 1 - (-2) \to 3y - 3z = 3$$

et on obtient le système équivalent

$$(S_2) = \begin{cases} x - 2y + 2z & = -2 \\ 7y - 7z & = 7 \\ 3y - 3z & = 3 \end{cases}$$

Notons que l'on peut "simplifier" en considérant les réductions

$$L_2 \to L_2/7 \quad , \quad L_3 \to L_3/3$$

on obtient le système

$$(S_2) = \begin{cases} x - 2y + 2z & = -2 \\ y - z & = 1 \\ y - z & = 1 \end{cases}$$

Prenons le pivot $(2, 2)$, la réduction s'écrit

$$L_1 \to L_1 + 2L_2 \to x - 2y + 2z + 2(y - z) = -2 + 2 \to x = 0$$

$$L_3 \to L_3 - L_2 \to y - z - (y - z) = 0 \to 0 = 0$$

et on obtient le système

$$(S_2) = \begin{cases} x & = 0 \\ y - z & = 1 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

On en déduit que toute solution s'écrit

$$x = 0, \ z = y - 1$$

et donc

$$\mathcal{S}(S) = \{(0, y, y - 1), \ y \in \mathbb{K}\}.$$

Dans ce cas on a une infinité de solutions, chaque valeur de $y$ donne une solution.

## 3. Structure de l'ensemble des solutions

Les exemples ci-dessus sont caractéristiques. On peut donc anticiper (on démontrera cette affirmation dans les chapitres sur les espaces vectoriels) la structure de l'ensemble des solutions

**Proposition 1.** *Soit $(S)$ un système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues. Alors*

1. *Soit $(S)$ admet une solution unique*
2. *Soit $(S)$ n'admet aucune solution*
3. *Soit $(S)$ admet une infinité de solutions et dans ce cas, il existe des variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_k}$ considérées comme des paramètres, telles toutes les autres variables soient des combinaisons linéaires de ces paramètres :*

$$x_{i_l} = a^l_1 x_{i_1} + a^l_{i_2} x_{i_2} + \cdots + a^l_{i_k} x_{i_k}, \quad a^j_i \in \mathbb{K}.$$

# Exercices

**Exercice 1**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} 5x + 3y & = -2 \\ 2x + y & = 3 \\ 3x + 2y & = -5 \end{cases}$$

**Exercice 2**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} 6x + 2y & = 4 \\ 9x + 3y & = 6 \end{cases}$$

**Exercice 3**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} y + z & = -1 \\ x - y + 2z & = 3 \\ 3x + 2y - z & = 5 \end{cases}$$

**Exercice 4**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} x - 3y + 2z + t & = -2 \\ 2x + 4y + z + 2t & = 4 \\ 7x + 9y + 5z + 7t & = 10 \\ -4x - 18y + z - 4t & = -16 \end{cases}$$

**Exercice 5**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} 2x + y + z + t & = b_1 \\ x + 2y + z + t & = b_2 \\ x + y + 2z + t & = b_3 \\ x + y + z + 2t & = b_4 \end{cases}$$

où $b_1, b_2, b_3, b_4$ sont des scalaires donnés.

**Exercice 6**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} ax - 3y + 5z & = 4 \\ x - ay + 3z & = 2 \\ 9x - 7y + 8az & = 0 \end{cases}$$

On discutera sur les solutions en fonction de $a$.

**Exercice 7**. Résoudre le système linéaire suivant

$$(S) = \begin{cases} ax + y + z & = 1 \\ x + ay + z & = 1 \\ x + y + az & = 1 \end{cases}$$

On discutera sur les solutions en fonction de $a$.

**Exercice 8**. Chercher les solutions entières du système suivant :

$$(S) = \begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4u & = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + 3u & = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + u & = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2u & = 1 \end{cases}$$

**Exercice 9**. Pour produire une certaine substance chimique, Il nous faut trois ingrédients différents A, B, et C. Les trois ingrédients doivent être dissouts dans l'eau séparément avant qu'ils agissent l'un sur l'autre pour former la substance chimique. Supposons qu'une solution contenant A à 1,5 g/cm3 combinée avec Une solution contenant B à 3,6 g/cm3 combinée avec une solution contenant C à 5,3 g/cm3 donne 25,07 g du produit chimique. Si la proportion pour A, B, C dans ces solutions sont changées à 2,5, 4,3, et 2,4 g/cm3, respectivement (tandis que les volumes demeurent les mêmes), alors 22,36 g du produit chimique sont produits. Finalement, si les proportions sont changées à 2,7, 5,5, et 3,2 g/cm3, respectivement, alors 28,14 g du produit chimique sont produits. Quels sont les volumes (en centimètres cubiques) des solutions contenant A, B, et C ?