FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 1 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 5

Composantes d'un vecteur dans une base. Changement de bases

Table des matières

.

Dans tout ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

1. Composantes d'un vecteur dans une base

1.1. **Composantes d'un vecteur dans une base donnée.** Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit $\mathbb{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Rappelons qu'une base est une famille libre et génératrice. La donnée de cette base va permettre de ramener tous les calculs linéaires sur les vecteurs de E en des calculs analogues à ceux que nous avons fait dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de E. La famille $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est nécessairement liée car une base est une famille libre maximale. Il existe donc une relation linéaire à coefficients non tous nuls

$$\alpha\overrightarrow{v} + \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{e_p} = 0.$$

Nécessairement $\alpha \neq 0$, sinon comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont indépendants, tous les autres coefficients α_i seraient nuls. Divisons donc par α et posons

$$x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha}.$$

On obtient

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}$$

et $\overrightarrow{v}$ s'écrit bien comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathbb{B}$. Montrons à présent que cette écriture est unique. Supposons que l'on ait aussi

$$\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{e_p}.$$

On en déduit

$$x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{e_p}$$

soit

$$(x_1 - y_1)\overrightarrow{e_1} + (x_2 - y_2)\overrightarrow{e_2} + \cdots + (x_p - y_p)\overrightarrow{e_p} = 0.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont linéairement indépendants, les coefficients de cette combinaison linéaire nulle sont tous nuls, ce qui donne

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_p = y_p.$$

On a donc l'unicité de l'écriture de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathbb{B}$.

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension p et soit $\mathbb{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E s'écrit de manière unique*

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}$$

avec $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$

Les sacalaires $x_1, x_2, \cdots, x_p$ s'appellent les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base donnée $\mathcal{B}$. Bien entendu ces composantes dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$. On pourra écrire

$$\overrightarrow{v} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}_{\mathcal{B}}$$

ou, si aucune confusion n'est possible quant à la base

$$\overrightarrow{v} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}.$$

Mais, si l'on utilise cette dernière notation, ne jamais oublier que le choix de la base $\mathcal{B}$ est sous-entendu.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$ ce qui correspond aux composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base canonique $\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\}$:

$$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}.$$

Considérons à présent les trois vecteurs

$$\overrightarrow{e_1}=(1,1,0),\overrightarrow{e_2}=(-1,0,1),\overrightarrow{e_3}=(0,1,-1).$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En effet la matrice de ces trois vecteurs est

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

et on a $\det M=-2$. Donc ces vecteurs sont linéairement indépendants. Comme $\dim\mathbb{R}^3=3$, trois vecteurs linéairement indépendants forment une famille libre maximale, c'est donc une base. Le vecteur $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$ admet une décomposition dans cette base

$$\overrightarrow{v}=X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}+Z\overrightarrow{e_3}.$$

Nous pouvons calculer X,Y,Z en fonction de x,y,z. On a

$$\overrightarrow{v}=X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}+Z\overrightarrow{e_3}=X(1,1,0)+Y(-1,0,1)+Z(0,1,-1)$$

d'où

$$\overrightarrow{v}=(X-Y,X+Z,Y-Z)=(x,y,z).$$

On obtient le système

$$\begin{cases}X-Y&=x\\X+Z&=y\\Y-Z&=z.\end{cases}$$

On en déduit $Y=X-x,Z=y-X,X-x-(y-X)=z$ soit

$$X=\frac{x+y+z}{2},Y=\frac{-x+y+z}{2},Z=\frac{-x+y-z}{2}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{v}=\frac{x+y+z}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{-x+y+z}{2}\overrightarrow{e_2}+\frac{-x+y-z}{2}\overrightarrow{e_3}$$

est la décomposition de $\overrightarrow{v}$ relative à la base $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$.

1.2. **Matrice d'un système de vecteurs dans une base donnée.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et soit $\mathcal{B}=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Donnons nous une famille (libre ou pas, génératrice ou pas) $\mathcal{F}=\{v_1,\cdots,v_k\}$ de vecteurs de E. Chacun de ces vecteurs se décomposent de manière unique dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases}v_1&=a_{1,1}\overrightarrow{e_1}+a_{1,2}\overrightarrow{e_2}+\cdots+a_{1,p}\overrightarrow{e_p}\\v_2&=a_{2,1}\overrightarrow{e_1}+a_{2,2}\overrightarrow{e_2}+\cdots+a_{2,p}\overrightarrow{e_p}\\\cdots&\\v_k&=a_{k,1}\overrightarrow{e_1}+a_{k,2}\overrightarrow{e_2}+\cdots+a_{k,p}\overrightarrow{e_p}\end{cases}$$

Notons que pour écrire toutes les composantes de ces vecteurs, nous utilisons deux indices $a_{i,j}$, le premier étant lié à l'indice du vecteur v_i, le deuxième correspondant à la composante de ce vecteur sur le vecteur de base e_j.

Définition 1. *On appelle matrice du système de vecteurs $\{v_1, \cdots, v_k\}$ relative à la base donnée $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$, le tableau rectangulaire de k lignes et p colonnes :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & & & \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,p} \end{pmatrix}$$

Notons que dans cette écriture matricielle, le premier indice des coefficients est celui de la ligne, le deuxième est celui de la colonne dans lequel il est situé. **On ne dérogera en aucune manière à cette convention, sous peine d'une confusion totale dans les calculs qui en dépendraient.**

Notons également que cette matrice dépend fortement de la base $\mathcal{B}$ donnée. Ceci signifie que si la famille $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_k\}$ de vecteurs de E est donnée et si l'on considère une autre base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_p}'\}$ alors la matrice de $\mathcal{F}$ relative à $\mathcal{B}'$ sera en général totalement différente de la matrice de $\mathcal{F}$ relative à $\mathcal{B}$. Une grande partie de la suite de ce cours consistera à établir une relation entre ces deux matrices.

1.3. **Comment reconnaître qu'une famille de vecteurs est une base.** Donnons nous une famille $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_k\}$ de vecteurs de E. Supposons $\dim E = p$. Comme toutes les bases de E contiennent p éléments, une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E est

$$k = p.$$

Si $k \neq p$, inutile de continuer, $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E.

Supposons donc $k = p$ et $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_p\}$. Considérons une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de E. (Notons que si on ne connaît pas à priori de base de E, pour vérifier que $\mathcal{F}$ est une base, nous procèderons directement comme dans le chapitre précédent en vérifiant que cette famille est libre. Toutefois, comme on suppose la dimension de E connue, cela laisse présager qu'une base est déjà connue.) Considérons la matrice de $\mathcal{F}$ relative à la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & & & \\ a_{p,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est un tableau carré (p-lignes et p-colonnes). Nous parlerons dans ce cas de matrice carrée. A toute matrice carrée M on peut faire correspondre un scalaire, appelé le déterminant de la matrice M et noté $\det M$ dont nous avons rappelé le calcul dans le deuxième chapitre dans le cas où $p = 2$ ou 3. Avant de donner la formule générale permettant le calcul de ce déterminant, énonçons le résultat central :

Théorème 2. *La famille $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_p\}$ de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension p est une base si et seulement si le déterminant de la matrice de $\mathcal{F}$ relative à une base $\mathcal{B}$ donnée a un déterminant non nul :*

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & & & \\ a_{p,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix} \neq 0$$

Nous allons écrire la formule générale du calcul de ce déterminant dans le paragraphe qui suit.

2. Matrices carrées

2.1. **L'espace vectoriel des matrices carrées.** On appelle matrice carrée réelle, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou complexe, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, d'ordre p tout tableau carré p lignes et p colonnes dont les éléments sont des scalaires de $\mathbb{K}$. On écrira une telle matrice sous la forme

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ sont indexés par deux indices i,j, le premier désigne la ligne qui le contient et le deuxième la colonne qui le contient. Ainsi $a_{i,j}$ est sur la ligne numéro i et sur la colonne numéro j. Nous noterons par $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour simplifier, nous noterons également $A=(a_{i,j})$ une telle matrice.

Nous pouvons définir dans $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$

(1) Une addition : si

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,p} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & b_{p,3} & \cdots & b_{p,p} \end{pmatrix}$$

alors $A+B$ est la matrice carrée d'ordre p

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} & \cdots & a_{3,p}+b_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1}+b_{p,1} & a_{p,2}+b_{p,2} & a_{p,3}+b_{p,3} & \cdots & a_{p,p}+b_{p,p} \end{pmatrix}$$

(2) Une multiplication externe : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix} \in\mathcal{M}(p,\mathbb{K}),$$

alors

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \lambda a_{1,3} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \lambda a_{2,3} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \lambda a_{3,1} & \lambda a_{3,2} & \lambda a_{3,3} & \cdots & \lambda a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{p,1} & \lambda a_{p,2} & \lambda a_{p,3} & \cdots & \lambda a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension p^2, une base étant donnée par les p^2 matrices distinctes dont tous les coefficients sont nuls exceptés un seul qui vaut 1. Plus précisément, si on note par $m_{i,j}$ la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls exceptés celui d'indice (i,j) qui vaut 1, alors la famille $\{m_{i,j},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq p\}$ est une base de $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$.

2.2. **Le déterminant d'une matrice carrée.** Nous avons déjà défini cette notion pour les matrices d'ordre 2 et 3 :

(1) Si
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
alors
$$\det A = ad - bc.$$

(2) Si
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$
alors
$$\det A = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_3 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$
calculé avec la règle de Sarrus, ou bien
$$\det A = a_1(\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}) - a_2(\det \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}) + a_3(\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix})$$
calculé avec la règle de Cramer.

C'est cette dernière formule qui va nous permettre d'écrire la définition dans le cas quelconque.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$.

Définition 2. *Pour chacun des coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A, le mineur $A_{i,j}$ de $a_{i,j}$ est le déterminant de la matrice carrée d'ordre $p-1$ obtenue en enlevant à A la ligne et la colonne contenant le coefficient $a_{i,j}$, c'est-à-dire la ligne i et la colonne j.*

Exemple : $p = 3$. Si
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$
alors,

$$A_{1,1} = \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2},\ A_{1,2} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}$$
$$A_{1,3} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1},$$
De la même façon on calcule tous les autres mineurs $A_{i,j}$. La formule de Cramer donnant le déterminant se résume alors à
$$\det A = a_{1,1}A_{1,1} - a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3}.$$

D'où en développant

$$\det A = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}).$$

Définition 3. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre p. Choisissons une ligne, par exemple la ligne numéro i. Alors

$$\det A = (-1)^{i+1j} a_{i,1}A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2}A_{i,2} + (-1)^{i+3} a_{i,3}A_{i,3} + \cdots + (-1)^{i+p} a_{i,p}A_{i,p}.$$

Remarque : sur le choix de la ligne La formule donnant le déterminant donne le même résultat quelle que soit la ligne choisie (heureusement !). On aura donc intérêt à choisir la ligne comportant le maximum de 0. En particulier si A contient une ligne n'ayant que des 0, son déterminant est nul.

La définition ci-dessus s'interprète comme un développement du déterminant suivant une ligne. On peut donner une définition analogue mais liée à un développement suivant une colonne.

Définition 4. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

une matrice carrée d'ordre p. Choisissons une colonne, par exemple la ligne numéro j. Alors

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1,j}A_{1,j} + (-1)^{i2+j} a_{2,j}A_{2,j} + (-1)^{3+j} a_{3,j}A_{3,j} + \cdots + (-1)^{p+j} a_{p,j}A_{p,j}.$$

Bien entendu, on trouve le même résultat dans les deux cas, on peut donc calculer le déterminant après un choix judicieux d'une ligne ou d'une colonne. Comme nous l'avons signalé plus haut on a le cas particulier

Proposition 1. *Soit A une matrice carrée d'ordre p. Si une ligne ou une colonne ne contient que des 0, alors son déterminant est nul.*

Exemple. Calcul du déterminant de la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & -10 & -4 \\ -4 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Développons par rapport à la première ligne (elle contient un 0) :

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 1 & -10 & -4 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 0 + (-2) \det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculons les déterminants d'ordre 3 par la règle de Sarrus :

$$\det\begin{pmatrix}-3 & 6 & 5\\ 1 & -10 & -4\\ 2 & 8 & 1\end{pmatrix} = 30 - 48 + 40 + 100 - 96 - 6 = 20$$

$$\det\begin{pmatrix}-3 & -3 & 5\\ 5 & 1 & -4\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} = -3 - 48 + 50 + 20 - 24 + 15 = 10$$

$$\det\begin{pmatrix}-3 & -3 & 6\\ 5 & 1 & -10\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix} = -24 - 120 + 60 + 24 + 120 - 60 = 0.$$

Ainsi

$$\det A = 20 - 20 + 0 = 0.$$

On peut déduire que les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ correspondant aux quatre colonnes sont liés.

2.3. **Le calcul du déterminant en utilisant PYTHON.** Dans PYTHON appeler le module NUMPY qui est une librairie permettant de faire du calcul matriciel et utiliser la fonction "det" pour calculer le déterminant de la matrice. > > > import numpy as np
> > > x = np.array([1, 2, 3], [3, 4, 5], [5, 6,7])
> > > x
array([1, 2, 3],[3, 4, 5], [5, 6,7])

Pour calculer le déterminant, on rajoute la commande

> > > np.linalg.det(a)

3. Changement de base

Dans l'exemple précédent, nous avons présenté un premier exemple de changement de base. Soit E un espace vectoriel de dimension finie p. Etant donnée une base de E, chaque vecteur de E s'écrit comme sous forme de p composantes. Mais ces composantes dépendent de la base choisie. Le but de cette section est de voir comment relier les composantes d'un vecteur dans une base donnée aux composantes de ce même vecteur dans une autre base.

3.1. **La matrice de passage.** Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Tout vecteur se décompose de façon unique dans cette base. Considérons une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$. Chacun de vecteurs $\overrightarrow{f_j}$ de cette nouvelle base se décompose dans la première base donnée :

$$\begin{cases}\overrightarrow{f_1} = \alpha_{1,1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,1}\overrightarrow{e_p}\\ \overrightarrow{f_2} = \alpha_{1,2}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,2}\overrightarrow{e_p}\\ \cdots\\ \overrightarrow{f_p} = \alpha_{1,p}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,p}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{p,p}\overrightarrow{e_p}\end{cases}$$

Ainsi $(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \cdots, \alpha_{p,1})$ sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_1}$ relatives à la première base $\mathcal{B}$, $(\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \cdots, \alpha_{p,2})$ sont les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_2}$ relative à la base $\mathcal{B}$, ainsi de suite pour chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Comme nous l'avons déjà signalé, nous avons besoin de deux indices pour numéroter chacune des composantes, le premier est relatif au numéro de la composante, le deuxième est lié à l'indice du vecteur.

Construction de la matrice de passage. Nous allons écrire toutes ces composantes sous la forme d'une matrice carrée **en respectant l'ordre suivant**

— la première colonne du tableau est formée des composantes du premier vecteur $\overrightarrow{f_1}$ de la nouvelle base,

— la deuxième colonne du tableau est formée des composantes du deuxième vecteur $\overrightarrow{f_2}$ de la nouvelle base,

— etc...

— la dernière colonne (la p-ième) est formée des composantes du dernier vecteur $\overrightarrow{f_p}$ de la nouvelle base,

On obtient donc la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

Bien se rappeler, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ se construit en mettant en colonne les composantes des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ relative à la première base $\mathcal{B}$.

Définition 5. *La matrice P est appelée la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.*

3.2. **La matrice de passage inverse.** Considérons toujours nos deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ mais cette fois décomposons les vecteurs de la première base dans la deuxième. Si $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$, chacun des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ de $\mathcal{B}$ se décompose dans la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \beta_{1,1}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,1}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,1}\overrightarrow{f_p} \\ \overrightarrow{e_2} = \beta_{1,2}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,2}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,2}\overrightarrow{f_p} \\ \cdots \\ \overrightarrow{e_p} = \beta_{1,p}\overrightarrow{f_1} + \beta_{2,p}\overrightarrow{f_2} + \cdots + \beta_{p,p}\overrightarrow{f_p} \end{array} \right.$$

On construit comme précédemment une matrice en mettant en colonne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$: on obtient donc la matrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \beta_{1,p} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \cdots & \beta_{2,p} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} & \cdots & \beta_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & \beta_{p,3} & \cdots & \beta_{p,p} \end{pmatrix}$$

Définition 6. *La matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est appelée la matrice inverse de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On la note aussi $Q = P^{-1}$.*

Remarque : Cas de la dimension 3. Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ de $\mathbb{R}^3$, nous avons construit au premier chapitre la matrice (carrée) de ces trois vecteurs. La propriété fondamentale de cette matrice était la suivante, si le déterminant est non nul, alors les trois vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment donc une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice est donc la matrice de passage de la base canonique $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$ à la nouvelle base

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$. On en déduit donc que le déterminant de cette matrice est non nul. Nous allons généraliser cette propriété pour une dimension quelconque. mais pour cela il faut définir le déterminant d'une matrice carrée quelconque.

3.3. **Déterminant de la matrice de passage d'une base à une autre.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Considérons une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ et soit P la matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Rappelons que cette matrice est construite en mettant en colonne successivement les composantes du vecteurs $\overrightarrow{f_1}$ relatives à la base $\mathcal{B}$, puis celles de $\overrightarrow{f_2}$, etc pour finir par celles de $\overrightarrow{f_p}$. Soit

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

cette matrice. Comme cette matrice peut être vue comme la matrice des composantes des vecteurs $\overrightarrow{f_1}, \cdots, \overrightarrow{f_p}$ dans la base $\mathcal{B}$, et comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, cette matrice a un déterminant non nul. On a donc

$$\det P \neq 0.$$

Théorème 3. *Soient E un espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ vérifie*

$$\det P \neq 0.$$

Etudions la réciproque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Considérons une famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ de p vecteurs ($p = \dim E$). Déterminons les composantes de chacun de ces vecteurs :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = a_{1,1}\overrightarrow{e_1} + a_{2,1}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,1}\overrightarrow{e_p} \\ \overrightarrow{v_2} = a_{1,2}\overrightarrow{e_1} + a_{2,2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,2}\overrightarrow{e_p} \\ \cdots \\ \overrightarrow{v_P} = a_{1,p}\overrightarrow{e_1} + a_{2,p}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{p,p}\overrightarrow{e_p} \end{cases}$$

et écrivons ces composantes en colonnes. On obtient la matrice de ces p vecteurs relative à la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Théorème 4. *La famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}\}$ est une nouvelle base de E si et seulement si*

$$\det M \neq 0.$$

On a donc une procédé assez simple pour vérifier si p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension p sont linéairement indépendants et constituent une base de cet espace.

4. Formule du changement de composantes

L'objectif de ce paragraphe est de relier les composantes d'un même vecteur mais relatives à deux bases différentes. Pour synthétiser tous ces résultats nous allons utilser le calcul matriciel que nous allons survoler dans ce qui suit.

4.1. **Un peu de calcul matriciel.** On appelle matrice p-lignes et q-colonnes tout tableau rectangulaire du type

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,q} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

que l'on notera également $M = (a_{i,j})$ et dans cette présentation, le premier indice du coefficient $a_{i,j}$ est celui de la ligne dans laquelle il est écrit et le deuxième celui de la colonne. On dira qu'une telle matrice est une matrice de type $p \times q$.

4.1.1. *Addition et multiplication externe.* En généralisant ce que nous avons vu précédemment pour les matrices carrées, nous pouvons dire que l'ensemble $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ des matrices de type $p \times q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $/K$ de dimension pq dont une base est donnée par le famille

$$\{E_{i,j}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$$

où $E_{i,j}$ est la matrice dont les coefficients vérifient $e_{i,j} = 1$ et $e_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ et $l \neq j$.

4.1.2. *Multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}(q, r, \mathbb{K})$.* Notons dès à présent qu'en général le produit d'une matrice quelconque rectangulaire par un autre est impossible. Pour pouvoir effectuer le produit d'une matrice A par une matrice B, noté $A \cdot B$, il faut que

le nombre de colonnes de A= nombres de lignes de B

Dans ce cas si A est une matrice de type $p \times q$ et B de type $q \times r$ alors $A \cdot B$ est une matrice de type $p \times r$ (p=nombres de lignes de A et r nombre de colonnes de B.

On peut remarquer que si cette condition est remplie, alors $A \cdot B$ existe, mais pas nécessairement $B \cdot A$.

La technique de la multiplication est ainsi définie : Posons $C = A \cdot B$. Le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice C est en quelque sorte le produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B (ce qui explique l'hypothèse $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}(q, r, \mathbb{K})$) :

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,q-1}b_{q-1,j} + a_{i,q}b_{q,j}.$$

Exemple. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $A \in \mathcal{M}(3, 3, \mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}(3, 2, \mathbb{R})$, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B, la multiplication $A \cdot B$ est donc possible. Posons $C = A \cdot B$. Alors $C = (c_{i,j}) \in$

$\mathcal{M}(3,2,\mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{l} c_{1,1} = 2\times 1 + 1\times(-1) + 0\times 3 = 2-1 = 1 \\ c_{1,2} = 2\times 2 + 1\times 1 + 0\times 1 = 4-1 = 5 \\ c_{2,1} = 0\times 1 + (-1)\times(-1) + 3\times 3 = 1+9 = 10 \\ c_{2,2} = 0\times 2 + (-1)\times 1 + 3\times 1 = -1+3 = 2 \\ c_{3,1} = 1\times 1 + 2\times(-1) + (-2)\times 3 = 1-2-6 = -7 \\ c_{3,1} = 1\times 2 + 2\times 1 + (-2)\times 1 = 2+2-2 = 2 \end{array}$$

Ainsi

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

4.1.3. *Matrice des composantes d'un vecteur.* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E et soit

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}$$

sa décomposition relative à la base $\mathcal{B}$. Cette base $\mathcal{B}$ étant sous-entendue, nous avons convenu d'écrire le vecteur $\overrightarrow{v}$ sous la forme

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

ce qui montre, une fois la base $\mathcal{B}$ fixée, le lien étroit entre E et l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Définition 7. *On appelle matrice des composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathcal{B}$ la matrice n-lignes et 1-colonne*

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

4.2. **Formule du changement de composantes.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ une nouvelle base. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E. Il admet une décomposition unique relative à la base $\mathcal{B}$:

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}.$$

Ainsi $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathcal{B}$. De même, ce même vecteur admet une décomposition unique relative à la base $\mathcal{B}'$:

$$\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{f_p}.$$

Ainsi $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathcal{B}'$.. Le théorème suivant décrit les relations entre les composantes relatives à la base $\mathcal{B}$ et celles relatives à la base $\mathcal{B}'$:

Théorème 5. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ deux bases de E et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E et soient*

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}, \quad \overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{f_p}$$

ses décompositions relatives aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $P = (\alpha_{i,j})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Ceci signifie que

$$\overrightarrow{f_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i}.$$

Comme

$$\overrightarrow{v} = y_1 \overrightarrow{f_1} + y_2 \overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p \overrightarrow{f_p} = \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{f_j}$$

on en déduit

$$\overrightarrow{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j \overrightarrow{f_j} = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_j \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_{i,j} \overrightarrow{e_i}.$$

Or

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p \overrightarrow{e_p}$$

et cette décomposition sur la base $\mathcal{B}$ est unique. En comparant les deux décompositions sur $\mathcal{B}$ on en déduit

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_{i,j}$$

et ceci donne la relation matricielle voulue.

Remarque. Cette relation matricielle qui relie les deux matrices des composantes du vecteur $\overrightarrow{v}$ relatives a deux bases ne donne pas directement l'expression des nouvelles composantes par rapport aux anciennes. C'est pourtant ce que l'on souhaiterait dans des problèmes de mécanique physique lors de changement de repère. Pour établir la relation matricielle donnant les nouvelles composantes en fonction des anciennes, nous devons donc utiliser la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Il est donc nécessaire d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{f_j}$:

$$\overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,i} \overrightarrow{f_j}.$$

La matrice de passage, que nous avons notée P^{-1}, vérifie

$$P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I_p$$

où I_p est la matrice, appelée matrice identité d'ordre p,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle se calcule en établissant les relations $\overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,i} \overrightarrow{f_j}$. Le calcul, dès que $p \geq 4$ peut s'avérer long et délicat. Il existe toutefois une formule directe permettant ce calcul de P^{-1}, mais qui n'abroge pas les difficultés et les sources d'erreurs que nous présentons ci-dessous. Il permet également de programmer par exemple sur Python un tel calcul.

4.3. **Calcul de P^{-1}.** Soit P la matrice de changement de base. On sait que son déterminant est non nul. Posons

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \alpha_{p,3} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$$

. Rappelons que le mineur du coefficient $\alpha_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de P en enlevant la ligne et la colonne contenat $\alpha_{i,j}$. Notons le $A_{i,j}$.

Définition 8. *Le cofacteur du coefficient $\alpha_{i,j}$ est*

$$Cof(\alpha_{i,j}) = (-1)^{i+j} A_{i,j}.$$

La comatrice de la matrice P, notée $Cof(P)$ est la matrice de coefficients $Cof(\alpha_{i,j})$:

$$Cof(P) = (Cof(\alpha_{i,j})).$$

Afin de présenter la formule générale donnant P^{-1}, nous avons encore besoin d'une définition :

Définition 9. *Soit $M = (a_{i,j})$ une matrice d'ordre $p \times q$. Alors la matrice transposée de M, notée ${}^tM$ est la matrice d'ordre $q \times p$ obtenue en condérant que la première ligne de ${}^tM$ est la première colonne de M, la deuxième ligne de ${}^tM$ est la deuxième colonne de M etc. Autrement dit, si ${}^tM = (b_{i,j})$, alors*

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Ceci nous permet d'affirmer

Théorème 6.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^tCof(P).$$

On ne peut se familiariser avec cette formule qu'en faisant beaucoup, beaucoup, beaucoup d'exercices.

Corollaire 1. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ et $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ deux bases de E et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de E et soient*

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}, \quad \overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{f_p}$$

ses décompositions relatives aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_p \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exercice corrigé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$. Soit $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}, \overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est une base de E et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(2) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

Solution.

(1) La matrice des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ décomposés dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui s'écrit en mettant en colonne les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $\mathcal{B}$, puis celles de $\overrightarrow{e_2}$ et enfin celles de $\overrightarrow{e_3}$. On a

$$\det P = 3 + 4 - 1 - 6 + 2 - 1 = 1 \neq 0$$

ce qui implique que les trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sont linéairement indépendants. Comme $\dim E = 3$, ces trois vecteurs indépendants forment une base de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ est donc la matrice P.

(2) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composantes dans la base $\mathcal{B}$ $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$. Soient y_1, y_2, y_3 les composantes de ce même vecteur dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$:

$$\overrightarrow{u} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + y_3\overrightarrow{e_3}.$$

Les relations entre ces nouvelles composantes et les anciennes sont décrites par la formule matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Développons cette relation matricielle en effectuant le produit des deux matrices comme décrit ci-dessus :

$$\begin{cases} 1 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ 0 = -y_1 + 3y_2 + y_3 \\ 1 = 2y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, nous savons que nous pouvons remplacer une ligne par cette ligne plus une combinaison linéaire des autres lignes. Cette remarque permet de trouver les solutions en se basant sur le pivot de Gauss qui consiste à éliminer la première variable dans les équations 2 et 3 puis la deuxième dans la troisième équation, on en déduira la valeur de la dernière variable les autres s'en déduisent :

— On garde la première équation L_1 et on remplace la deuxième L_2 par $L_2 + L_1$ et la troisième par $L_3 - 2L_1$:

$$\begin{cases} L_1 & 1 & = y_1 & +2y_2 & +y_3 \\ L_2 + L_1 & 1 & = 0 & +5y_2 & +2y_3 \\ L_3 - 2L_1 & -1 & = 0 & -3y_2 & -y_3 \end{cases}$$

— On garde, dans le nouveau système L_1, L_2 et on remplace L_3 par $5L_3 + L_2$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} L_1 & 1 & = y_1 & +2y_2 & +y_3 \\ L_2 & 1 & = 0 & +5y_2 & +2y_3 \\ 5L_3 + 3L_2 & -2 & = 0 & 0 & +y_3 \end{array}\right.$$

On en déduit

$$y_3 = -2$$

puis L_2 s'écrit $1 = 5y_2 - 4$ soit

$$y_2 = 1$$

et enfin L_1 donne $1 = y_1 + 2 - 2$ soit

$$y_1 = 1.$$

Ainsi les composantes de $\overrightarrow{u}$ relatives à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\}$ sont $(1, 1, -2)$.

(3) Remarquons que l'équation matricielle ne permet pas d'écrire directement les nouvelles composantes. Si P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, on aura alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous devons calculer la matrice P^{-1} dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ relatives à la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} \\ 5(\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}) - 2(\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$$

et la deuxième équation donne

$$\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = 5\overrightarrow{j} - 3(-\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3})$$

soit

$$5\overrightarrow{j} = -5\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 15\overrightarrow{e_3}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}.$$

Enfin la première équation donne

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - (-\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}) + 2(-\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3})$$

soit
$$\overrightarrow{i} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 7\overrightarrow{e_3}$$
Ecrivons les composantes de ces trois vecteurs en colonne, on trouve
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
soit
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
On retrouve le résultat.

Remarque Calculons P^{-1} en utilisant la comatrice de P. Tout d'abord
$$\det P = 1.$$
Les mineurs des coefficients de$P$ sont
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
On en déduit
$$Cof(P) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
et donc
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
La relation $Y = P^{-1}X$ où X (respectivement Y) est la matrice des composantes x_i (resp. y_i) de $\overrightarrow{u}$, donne
$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ y_2 = 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ y_3 = -7x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$