FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 1 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 6

Applications linéaires

Table des matières

1. Applications linéaires 2
1.1. Définition 2
1.2. Premières propriétés d'une application linéaire 2
1.3. Un peu de vocabulaire 3
2. Noyau et Image d'une application linéaire 3
2.1. Noyau d'une application linéaire 3
2.2. Applications linéaires injectives 5
2.3. Image d'une application linéaire 6
2.4. Applications linéaires surjectives 6
2.5. Calcul du noyau lorsque E et F sont de dimension finie 6
2.6. Comment déterminer $\mathrm{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie. 8
3. Cas de la dimension finie : le théorème Noyau-Image 9
3.1. Applications. 10
3.2. Isomorphismes. Automorphismes 10
4. Calcul analytique. Matrices d'une application linéaire 12
4.1. Matrice d'une application linéaire relative à des bases données 12
4.2. Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée 14
4.3. Matrice d'un isomorphisme 14
5. Symétries et projections dans un espace vectoriel 14
5.1. Symétries 14
5.2. Projections dans E 16

1. Applications linéaires

Nous allons introduire, dans ce chapitre, la notion d'application linéaire entre deux espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications qui transforment toute combinaison linéaire de vecteurs du premier espace en une combinaison linéaire de vecteurs du deuxième espace.

1.1. **Définition.**

Définition 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ (le corps des réels ou celui des complexes) et soit*

$$f : E \to F$$

une application de E dans F. Elle est appelée linéaire si elle vérifie

(1) $\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in E, \quad f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2})$,

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{v}), \ \forall \overrightarrow{v} \in E$.

Exemples

(1) On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = ax$ où a est un nombre réel donné. Elle vérifie, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
   (a) $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$,
   (b) $f(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha f(x)$

   et f est bien linéaire. On montrera en exercice que toute application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est toujours du type $f(x) = ax$.

(2) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = ax + by$$

   où a, b sont des réels donnés. On a alors
   (a) $f((x_1, y_1)+(x_2, y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2) = f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)$
   (b) $f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = a(\alpha x) + b(\alpha y) = \alpha(ax + by) = \alpha f(x, y)$. Cette application est linéaire.

(3) Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles d'une variable réelle qui sont dérivables. Soit $D : E \to E$ l'application définie par

$$D(f) = f'$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Comme
   (a) $D(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = D(f_1) + D(f_2)$
   (b) $D(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha D(f)$

Cette application est linéaire.

1.2. **Premières propriétés d'une application linéaire.**

Nous en déduisons immédiatement la définition que si $\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{v_p}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de E, alors si f est linéaire :

$$f(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{v_p}) = \alpha_1 f(\overrightarrow{v_1}) + \alpha_2 f(\overrightarrow{v_2}) + \cdots + \alpha_p f(\overrightarrow{v_p}).$$

Proposition 1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors*
$$f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$$
où $\overrightarrow{0_E}$ désigne le vecteur nul de E et $\overrightarrow{0_F}$ celui de F.

Démonstration. En effet, comme f est linéaire, on a
$$f(\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) = f(\overrightarrow{0_E}) + f(\overrightarrow{0_E}) = 2f(\overrightarrow{0_E}).$$
Mais $\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$ et donc
$$f(\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) = f(\overrightarrow{0_E}).$$
Ainsi
$$f(\overrightarrow{0_E}) = 2f(\overrightarrow{0_E})$$
ce qui implique
$$f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}.$$

Proposition 2. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors pour tout $\overrightarrow{v} \in E$,*
$$f(-\overrightarrow{v}) = -f(\overrightarrow{v}).$$

Démonstration. En effet
$$f(-\overrightarrow{v}) = f((-1)\overrightarrow{v}) = (-1)f(\overrightarrow{v}) = -f(\overrightarrow{v}).$$

Application. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = ax + b$. Alors $f(0) = b$ et si $b \neq 0$ cette application n'est pas linéaire. Une telle application est appelée affine.

1.3. Un peu de vocabulaire.

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application linéaire*
$$f : E \to E$$
de E à valeurs dans le même espace vectoriel est appelée un endomorphisme de E.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application linéaire*
$$f : E \to \mathbb{K}$$
de E à valeurs le corps de base est appelée une forme linéaire sur E.

2. Noyau et Image d'une application linéaire

2.1. Noyau d'une application linéaire.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Nous avons vu que
$$f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$$
où $\overrightarrow{0_E}$ désigne le vecteur nul de E et $\overrightarrow{0_F}$ celui de F. Ainsi le sous-ensemble de E des vecteurs qui ont pour image par f le vecteur nul contient au moins $\overrightarrow{0_E}$. On appelle Noyau de f ce sous-ensemble de E :
$$\ker(f) = \{\overrightarrow{v} \in E,\ f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_F}\}.$$

Proposition 3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\ker(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Comme $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, alors $\overrightarrow{0_E} \in \ker(f)$. Soit $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ deux vecteurs de $\ker(f)$. Ceci signifie

$$f(\overrightarrow{v_1}) = f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0_F}.$$

Montrons que $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in \ker(f)$. Pour cela calculons $f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$.

$$f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2}) \text{ (car } f \text{ est linéaire) } = \overrightarrow{0_F} + \overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$$

et donc $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in \ker(f)$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et soit $\overrightarrow{v} \in \ker(f)$. Montrons que $\alpha\overrightarrow{v} \in \ker(f)$.

$$f(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$$

et donc $\alpha\overrightarrow{v} \in \ker(f)$. Ainsi $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = 2x - y.$$

Le noyau $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ constitué des vecteurs (x, y) tels que $2x - y = 0$. Géométriquement, il représente dans le plan $\mathbb{R}^2$ la droite vectorielle (qui passe par 0) d'équation

$$y = 2x.$$

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (2x - y, x + y).$$

Alors

$$\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (2x - y, x + y) = (0, 0)\}.$$

Déterminons les vecteurs de ce sous-espace. On doit résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

On obtient dans la première équation $y = 2x$ et la deuxième équation nous donne

$$x + 2x = 3x = 0$$

Ainsi $x = 0$ et donc $y = 0$. On en déduit

$$\ker(f) = \{(0, 0)\}.$$

(3) Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions réelles d'une variable réelle qui sont dérivables. Soit $D : E \to E$ l'application définie par

$$D(f) = f'$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Nous avons vu que cette application était linéaire. Son noyau est constituée des fonctions dérivables vérifiant

$$D(f) = f' = 0.$$

Une telle application est donc constante et le noyau de D est constitué de toutes les fonctions constantes.

2.2. **Applications linéaires injectives.** Le noyau d'une application linéaire contient des informations sur cette application. Rappelons dans un premier temps la notion d'injectivité. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *injective* si deux éléments distincts x_1 et x_2 de A ont pour image par f deux éléments distincts de B. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ est injective si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in A$, alors $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ceci est aussi équivalent à dire :

$f : A \to B$ est injective si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in A$, l'équation $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Exemples.

(1) Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par
$$f(x) = 2x + 3.$$
(Elle n'est pas linéaire). Est-elle injective ? Soit x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors
$$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$
d'où
$$2x_1 = 2x_2$$
soit
$$x_1 = x_2.$$
L'application est injective.

(2) Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par
$$f(x) = x^2.$$
(Elle n'est pas linéaire). Est-elle injective ? On voit directement que $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ ont la même image $f(x_1) = f(x_2) = 1$. L'application n'est pas injective.

Proposition 4. *L'application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement son noyau $\ker(f)$ est réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$.*

Démonstration. Supposons que f soit injective. Nous devons déterminer son noyau. Soit $\overrightarrow{v} \in \ker(f)$. Il vérifie donc $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0_F}$. Mais comme f est linéaire, cette application vérifie aussi $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{0_E})$. L'injectivité de f implique donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0_E}$ et donc le noyau de f ne contient que le vecteur nul de E. Démontrons à présent la réciproque. Soit $f : E \to F$ une application linéaire vérifiant $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$. Considérons deux éléments $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de E. Supposons que $f(\overrightarrow{v_1}) = f(\overrightarrow{v_2})$. La linéairité de f implique
$$f(\overrightarrow{v_1}) - f(\overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})$$
et donc $f(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0_F}$. Ainsi $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ est un vecteur du noyau de f qui par hypothèse ne contient que le vecteur nul. D'où $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0_E}$ ce qui donne
$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$$
et l'injectivité de f s'en déduit.

2.3. **Image d'une application linéaire.** On appelle Image de l'application linéaire $f : E \to F$ le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$ constitué de tous les éléments images par f des éléments de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\overrightarrow{v}),\ \forall \overrightarrow{v} \in E\}.$$

Proposition 5. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. Comme $f(\{\overrightarrow{0_E}\}) = \{\overrightarrow{0_F}\}$, alors $\{\overrightarrow{0_F}\}$ est bien dans $\mathrm{Im}(f)$. Soient $\overrightarrow{Y_1}$ et $\overrightarrow{Y_2}$ deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Il existe alors $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in E$ tels que

$$f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{Y_1}, \quad f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{Y_2}.$$

Comme f est linéaire, $f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{Y_2} = f(\overrightarrow{v_1}) + f(\overrightarrow{v_2}) = f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$$

ce qui montre que la somme $\overrightarrow{Y_1}+\overrightarrow{Y_2}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$ de E et donc $\overrightarrow{Y_1}+\overrightarrow{Y_2} \in \mathrm{Im}(f)$. De même, soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{Y}$. Alors

$$\alpha\overrightarrow{Y} = \alpha f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha\overrightarrow{v}) \text{ (car } f \text{ est linéaire)}$$

et donc le vecteur $\alpha\overrightarrow{Y}$ est l'image de $\alpha\overrightarrow{v}$. Donc $\alpha\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2.4. **Applications linéaires surjectives.** L'information sur f contenue dans ce sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de F concerne la surjectivité. Rappelons la définition générale. Une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B est dite *surjective* si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A. Ceci est aussi équivalent à dire

$f : A \to B$ est surjective si pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Proposition 6. *L'application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. En effet si f est surjective, tout élément de F est l'image d'un élément (au moins) de E. Ceci signifie que $\mathrm{Im}(f) = F$ et réciproquement.

2.5. **Calcul du noyau lorsque E et F sont de dimension finie.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Nous supposons ici que E et F sont de dimension finie. Déterminer le noyau de f consiste à résoudre l'équation vectorielle

$$f(\overrightarrow{v}) = \{\overrightarrow{0_F}\}.$$

Dans le cas de la dimension finie, cette équation se ramène à un système linéaire. En effet, considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E et une base $\{\overrightarrow{f_1}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ de F. Alors, si $\overrightarrow{v} \in E$, il se décompose de façon unique dans la base donnée :

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Comme f est linéaire

$$f(\overrightarrow{v}) = f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Mais les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$ sont dans F. Ils se décomposent dans la base de F choisie :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) & = a_{11}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{p1}\overrightarrow{f_p} \\ f(\overrightarrow{e_2}) & = a_{12}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{p2}\overrightarrow{f_p} \\ \cdots & \cdots \\ f(\overrightarrow{e_n}) & = a_{1n}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{pn}\overrightarrow{f_p} \end{cases}$$

Ainsi

$$f(\overrightarrow{v}) = x_1(a_{11}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{p1}\overrightarrow{f_p}) + \cdots + x_n(a_{1n}\overrightarrow{f_1} + \cdots + a_{pn}\overrightarrow{f_p})$$

ou encore

$$f(X) = (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})\overrightarrow{f_1} + \cdots + (x_1a_{p1} + \cdots + x_na_{pn})\overrightarrow{f_p}.$$

L'équation $f(\overrightarrow{v}) = \{\overrightarrow{0_F}\}$ est donc équivalente à

$$(x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n})\overrightarrow{f_1} + \cdots + (x_1a_{p1} + \cdots + x_na_{pn})\overrightarrow{f_p} = \{\overrightarrow{0_F}\}$$

c'est-à-dire au système

$$\begin{cases} x_1a_{11} + \cdots + x_na_{1n} & = 0 \\ x_1a_{21} + \cdots + x_na_{2n} & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ x_1a_{p1} + \cdots + x_na_{pn} & = 0 \end{cases}$$

Exemple. Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie par

$$f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ f(\overrightarrow{k}) = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}.$$

Calculons son noyau. Soit $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$f(\overrightarrow{v}) = f(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j}) + zf(\overrightarrow{k})$$

et donc

$$f(\overrightarrow{v}) = x(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) + y(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + z(-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$$

ce qui s'écrit

$$f(\overrightarrow{v}) = (2x + y - 2z)\overrightarrow{i} + (y)\overrightarrow{j} + (x + y - z)\overrightarrow{k}.$$

D'où le système

$$\begin{cases} 2x + y - 2z & = 0 \\ y & = 0 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$$

On en déduit $y = 0$ et donc

$$\begin{cases} 2x - 2z & = 0 \\ x - z & = 0 \end{cases}$$

soit $x = z$. Ainsi si $\overrightarrow{v} = (x, y, z) \in \ker(f)$, alors les coordonnées vérifient

$$x = z,\ y = 0.$$

D'où $\overrightarrow{v} = (x, 0, x)$. Ainsi

$$\ker(f) = \{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

2.6. **Comment déterminer** $\mathrm{Im}(f)$ **lorsque** E **est de dimension finie.** Supposons que E soit de dimension finie n. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E se décompose sur cette base $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. Considérons le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de F. Soit $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v}) = f(x_1\overrightarrow{e}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Ceci nous montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs

$$f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n}).$$

On en déduit que si $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est une base de E, alors la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(F)$.

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Alors la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(F)$.

Mais notons que cette famille n'est pas en général libre et n'est pas en général une base de $\mathrm{Im}(f)$. Le théorème suivant nous apportera quelque précision sur ceci. Auparavant étudions un exemple.

Exemple. Soit l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

définie par

$$f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k},\ f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ f(\overrightarrow{k}) = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}.$$

Calculons son image. Soit $\overrightarrow{Y} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^3$ (ici $\mathbb{R}^3$ est l'espace d'arrivée). Alors si $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in E = \mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v}).$$

Mais

$$\left\{\begin{array}{ll} f(\overrightarrow{v}) & = f(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j}) + zf(\overrightarrow{k}) \\ & = x(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) + y(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + z(-2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}) \\ & = (2x + y - 2z)\overrightarrow{i} + (y)\overrightarrow{j} + (x + y - z)\overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

D'où le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + y - 2z & = x' \\ y & = y' \\ x + y - z & = z' \end{array}\right.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{Y}$ a une préimage si et seulement si on peut trouver x, y, z en fonction de x', y', z'. Les inconnues sont les variables x, y, z tandis que x', y', z' apparaissent comme des paramètres. Résolvons ce système. On a $y = y'$ d'où

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x - 2z & = x' - y' \\ x - z & = z' - y'. \end{array}\right.$$

Ce système n'a de solutions que si

$$x' - y' = 2(z' - y')$$

autrement dit

$$x' + y' - 2z' = 0$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}(f) = \{(x', y', z') \text{ tels que } x' + y' - 2z' = 0\}.$$

Supposons $x' + y' - 2z' = 0$. Alors la résolution du système précédent donne

$$\begin{cases} y & = y' \\ z & = y' - z' + x \end{cases}$$

Ceci signifie que tout vecteur de coordonnées

$$(x, y', y' - z' + x)$$

est une préimage du vecteur $\overrightarrow{Y} = (x', y', z')$.

3. Cas de la dimension finie : le théorème Noyau-Image

Supposons à présent que les espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ soient de dimension finie.

Théorème 1. *Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a alors*

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, il en est de même du sous-espace $\ker(f)$. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de $ker(f)$. D'après le théorème de la base incomplète, nous pouvons trouver des vecteurs linéairement indépendants $\{\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ tels que la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ soit une base de E. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ à partir de cette base. D'après la remarque ci-dessus, $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par la famille

$$\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_p}), f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}.$$

Mais comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}$ sont dans $\ker(f)$, leurs images par f sont nulles et donc la famille $\mathcal{B}$ se réduit à $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Ainsi les vecteurs $f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$ engendrent $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est libre. Supposons qu'il existe une combinaison linéaire nulle entre ces vecteurs :

$$\overrightarrow{0}_F = a_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + a_{p+2} f(\overrightarrow{e_{p+2}}) + \cdots + a_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Comme f est linéaire, il vient

$$\overrightarrow{0}_F = f(a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n \overrightarrow{e_n}).$$

Ainsi le vecteur $a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}$ est dans le noyau de f. Comme $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de $ker(f)$, nous avons donc

$$a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n} = b_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + b_p\overrightarrow{e_p}$$

soit

$$b_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + b_p\overrightarrow{e_p} - a_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} - a_{p+2}\overrightarrow{e_{p+2}} + \cdots - a_n\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ sont linéairement indépendants, nous en déduisons

$$b_1 = \cdots = b_p = a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$$

et donc $\overrightarrow{0_F} = a_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + a_{p+2} f(\overrightarrow{e_{p+2}}) + \cdots + a_n f(\overrightarrow{e_n})$ implique $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$. La famille $\mathcal{B} = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est donc libre dans $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est génératrice , c'est une base de cet espace. Ceci montre que

$$\dim \mathrm{Im}(f) = n - p = \dim E - \dim \ker(f)$$

d'où le théorème.

Définition 4. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle rang de f et on le note* $\mathrm{rg}(f)$ *la dimension de* $\mathrm{Im}(f)$ *:*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi le théorème noyau image donne la valeur du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker(f).$$

On notera que dans cette formule la dimension de F n'intervient pas.

3.1. Applications.

(1) Pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(f) = \dim F$. En effet, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, sa dimension est inférieure ou égale à celle de F et nous avons $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement s'ils ont la même dimension.

(2) Rappelons qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi une application linéaire est bijective si et seulement si on a à la fois

  (a) $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$,

  (b) $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.

(3) Supposons que $F = E$ c'est-à-dire que f soit une application linéaire

$$f : E \to E$$

On dit dans ce cas que l'application linéaire est un *endomorphisme* de E. Supposons que f soit injective. Alors $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et donc $\dim \ker(f) = 0$. Ainsi

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Mais ici $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. Ils coïncident donc :

$$E = \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi f est surjective donc bijective.

Proposition 8. *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors si f est injectif, il est aussi surjectf et donc bijectif. De même si f est surjectif, il est aussi injectif donc bijectif.*

Démonstration. La deuxième partie de cette proposition se démontre comme la première.

3.2. Isomorphismes. Automorphismes.

Définition 5. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que f est un isomorphisme si elle est bijective. Dans ce cas sa bijection réciproque est aussi linéaire et donc un isomorphisme de F dans E. On dit que f est un automorphisme si f est un isomorphisme de E dans E, c'est-à-dire un endomorphisme bijectif.*

Par exemple, si $f : E \to E$ est un endomorphisme, alors f est un isomorphisme si et seulement si il est injectif. Montrons que si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors sa bijection réciproque est aussi linéaire. Soit $\overrightarrow{Y}_1$ et $\overrightarrow{Y}_2$ deux vecteurs de F. Il existe $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ dans E tels que

$$\overrightarrow{Y}_1 = f(\overrightarrow{v}_1),\ \overrightarrow{Y}_2 = f(\overrightarrow{v}_2).$$

Ainsi

$$f^{-1}(\overrightarrow{Y}_1 + \overrightarrow{Y}_2) = f^{-1}(f(\overrightarrow{v}_1) + f(\overrightarrow{v}_2) = f^{-1}(f(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = f^{-1}(\overrightarrow{Y}_1) + f^{-1}(\overrightarrow{Y}_2).$$

De même $f^{-1}(a\overrightarrow{Y}_1) = af^{-1}(\overrightarrow{Y}_1)$ et f^{-1} est linéaire.

Application. Si f est un automorphisme de E alors $f^2 = f \circ f$ est aussi un automorphisme et $(f^2)^{-1} = (f^{-1})^2$.

Théorème 2. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors f est un isomorphisme si l'image $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ d'une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E est une base de F.*

Démonstration. Supposons que $f : E \to F$ soit un isomorphisme. Soit $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E et soit $\overrightarrow{Y} \in F$. Comme f est bijective, il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v})$. Or $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_n}$. D'où

$$\overrightarrow{Y} = f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_n}.) = x_1 f\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_p f(\overrightarrow{e_n})$$

ce qui montre que la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est génératrice dans F. Considérons maintenant une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs

$$0 = y_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + y_p f(\overrightarrow{e_n}) = f(y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_p\overrightarrow{e_n})$$

et donc $y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_p\overrightarrow{e_n} \in \ker(f)$. Comme f est bijective, $\ker(f) = \{0\}$ ce qui implique $y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_p\overrightarrow{e_n} = 0$. Mais la famille $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ est libre, d'où $y_1 = \cdots = y_p = 0$ et $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est libre, c'est donc une base de F

Inversement supposons que l'image d'une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E soit une base de f. Soit $\overrightarrow{v} \in \ker(f)$. Décomposons ce vecteur : $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_n}$. Ainsi

$$0 = f(\overrightarrow{v}) = f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_n}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_p f(\overrightarrow{e_n}).$$

Mais $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une base de F donc $x_1 = \cdots = x_p = 0$ ce qui implique $\ker(f) = \{0\}$ et f est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\overrightarrow{Y} \in F$. Il se décompose

$$\overrightarrow{Y} = y_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + y_p f(\overrightarrow{e_n})$$

car $\{f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ est une base de F. D'où

$$\overrightarrow{Y} = f(y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_y\overrightarrow{e_n})$$

et si $\overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_y\overrightarrow{e_n}$, alors $\overrightarrow{v} \in E$ et $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v})$. Ainsi f est surjective et donc bijective.

Définition 6. *On dit que deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ sont isomorphes, s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces.*

On déduit du théorème précédent

Corollaire 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (de dimension finie) et isomorphes. Alors ils ont la même dimension.*

4. Calcul analytique. Matrices d'une application linéaire

4.1. **Matrice d'une application linéaire relative à des bases données.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. La remarque qui suit va être la base du calcul analytique.

L'application linéaire f est entièrement déterminée dès que l'on connait les images des vecteurs d'une base de E.

Expliquons cette remarque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Si $\overrightarrow{v} \in E$, il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

et le n-uple $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les composantes de $\overrightarrow{v}$ relatives à la base $\mathbb{B}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) &= f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) \\ &= x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}). \end{aligned}$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{v}$ étant donné, ses composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont aussi données et donc $f(\overrightarrow{v})$ peut être calculé dès que l'on connait les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$.

Donnons à présent une base de F : $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \cdots, \overrightarrow{f}_p\}$ (nous supposons $p = \dim F$). Chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e}_i)$ est dans F et se décompose ainsi

$$f(\overrightarrow{e}_i) = \alpha_{1,i}\overrightarrow{f}_1 + \alpha_{2,i}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + \alpha_{p,i}\overrightarrow{f}_p$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Rangeons ces coefficients $\alpha_{i,j}$ sont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$$

Dans ce rangement, le premier indice du coefficient $\alpha_{i,j}$ correspond au numéro de la ligne et le deuxième au numéro de la colonne contenant ce coefficient. En fait nous écrivons en colonne les composantes des transformées des vecteurs de la base de E : $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_{n-1}}), f(\overrightarrow{e_n})$. Ce mode de rangement permet de trouver facilement les composantes du vecteur image $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v})$ relative à la base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ donnée : l'équation $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{v})$ est équivalente à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notons enfin que cette matrice de f ainsi déterminée dépend fortement des bases choisies de E et F. Dans la dernière partie de ce cours, nous regarderons comment trouver de "bonnes bases" afin que l'écriture matricielle de f en soit simplifiée.

Exemples.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 3x_3).$$

Calculons sa matrice relative aux bases canoniques $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ceci signifie que

$$\overrightarrow{v} = (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3},\ f(\overrightarrow{v}) = (2x_1 + x_2 - x_3)\overrightarrow{f_1} + (x_1 - x_2 + 3x_3)\overrightarrow{f_2}.$$

Pour cela calculons les transformées des vecteurs de bases $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), f(\overrightarrow{e_3})$. Comme $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, alors

$$f(\overrightarrow{e_1}) = f(1, 0, 0) = (2, 1) = 2\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}.$$

De même

$$f(\overrightarrow{e_2}) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2},\quad f(\overrightarrow{e_3}) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -\overrightarrow{f_1} + 3\overrightarrow{f_2}.$$

La matrice de f relative à ces deux bases se construit en mettant en colonne les composantes des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), f(\overrightarrow{e_3})$. On obtient la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Considérons la même application linéaire, mais donnons comme base de $\mathbb{R}^3$, la famille $\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\}$ donnée par

$$\overrightarrow{e'_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e'_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e'_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}.$$

Vérifions que nous avons bien une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ces trois vecteurs est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut 3. Il est différent de 0 donc on a bien une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. Calculons la matrice de f relative aux bases $\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\}$ pour $\mathbb{R}^3$ et $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\}$ pour l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e'_1}) = f(\overrightarrow{e_1}) + f(\overrightarrow{e_2}) = (3, 0), \\ f(\overrightarrow{e'_2}) = f(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = (0, 2), \\ f(\overrightarrow{e'_3}) = f(\overrightarrow{e_1}) - f(\overrightarrow{e_2}) + f(\overrightarrow{e_3}) = (0, 5). \end{cases}$$

La matrice cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous voyons bien sur cet exemple que l'écriture de la matrice de f dépend du choix des bases des espaces de départ et d'arrivée.

4.2. **Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.** Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E (rappelons qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E). Pour déterminer une matrice de f nous allons prendre la même base dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée.

Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Si $\overrightarrow{v} \in E$, il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

On a donc $(\overrightarrow{v}) = f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) = x_1 f\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n})$. Psons

$$f(\overrightarrow{e}_i) = \alpha_{1,i}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{2,i}\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_{n,i}\overrightarrow{e_n}$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Définition 7. *La matrice de l'endomorphisme $f : E \to E$ relative à la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E est la matrice carrée*

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

4.3. **Matrice d'un isomorphisme.** Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Nous avons vu dans ce cas que

$$\dim E = \dim F.$$

Soient $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E et $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n}\}$ une base de F. Si

$$f(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\overrightarrow{f_k}$$

alors la matrice $M = (\alpha_{i,k})$ est une matrice carrée.

Proposition 9. *La matrice M d'un isomorphisme relative à des bases données de E et F vérifie*

$$\det M \neq 0.$$

Démonstration. En effet le vecteurs colonnes de cette matrice sont les matrices colonnes associées aux vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$ et ces vecteurs forment une base de F. Ainsi M a un déterminant non nul et est inversible.

Corollaire 2. *La matrice inverse M^{-1} de M est la matrice de la bijection inverse $f^{-1} : F \to E$ reative aux bases $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n}\}$ et $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de F et E.*

5. Symétries et projections dans un espace vectoriel

5.1. **Symétries.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 8. *On appelle symétrie sur E toute endomorphisme de E :*

$$s : E \to E$$

qui vérifie

$$s^2 = s \circ s = Id_E$$

où Id_E désigne l'application idebtique de E.

Ainsi, pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, on a

$$s(s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$$

et donc l'application linéaire s est bijective ayant comme application inverse l'application s elle même :

$$s^{-1} = s.$$

Comme elle est bijective, $\ker(s) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(s) = E$.

Soit $F_1 = \{\overrightarrow{v} \in E, \ , s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}$. Comme $s(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ s'écrit aussi

$$(s - Id)(\overrightarrow{v}) = 0$$

on a donc

$$F_1 = \ker(s - Id).$$

De même soit $F_2 = \{\overrightarrow{v} \in E, \ , s(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}\}$. On a aussi

$$F_1 = \ker(s + Id).$$

Proposition 10. *Soit s une symétrie dans E et soient $F_1 = \ker(s - Id)$ et $F_2 = \ker(s + Id)$. Alors les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E :*

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

Inversement soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires dans E. Tout vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ s'écrite de manière unique $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$ avec $\overrightarrow{v}_i \in F_I$ et l'application linéaire

$$s = E = F_1 \oplus F_2 \to E$$

définie par

$$s(\overrightarrow{v}) = s(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$$

est une symétrie dans E.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 = \frac{\overrightarrow{v} - s(\overrightarrow{v})}{2} \\ \overrightarrow{v}_2 = \frac{\overrightarrow{v} + s(\overrightarrow{v})}{2} \end{cases}$$

On a bien

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2.$$

Comme $2(s - Id)(\overrightarrow{v}_1) = s(\overrightarrow{v}) - s^2(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v} + s^2(\overrightarrow{v}) = 0$ on a bien

$$\overrightarrow{v}_1 \in F_1.$$

On montre de même que

$$\overrightarrow{v}_2 \in F_2.$$

Ainsi $E = F_1 + F_2$. Ces deux sous-espaces sont supplémentaires si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$. On a donc $(s - Id)(\overrightarrow{v}) = s(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v} = 0$ et $(s + Id)(\overrightarrow{v}) = s(\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = 0$. En ajoutant ces deus relations, on déduit $\overrightarrow{v} = 0$ et donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.Ce qui démontre la première partie de la proposition.

Réciproquement, supposons $E = F_1 \oplus F_2$ et soit $s(\overrightarrow{v}) = s(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$. Alors

$$s^2(\overrightarrow{v}) = s(\overrightarrow{v}_1) - s(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}$$

car $s(\overrightarrow{v}_1) = s(\overrightarrow{v}_1 + 0) = \overrightarrow{v}_1$ et $s(\overrightarrow{v}_1) = s(0 + \overrightarrow{v}_2) = -\overrightarrow{v}_1$. Ainsi $s^2 = Id$. On vérifie sans peine que $\ker(s - Id) = F_1$ et $\ker(s + Id) = F_2$..

On dira que s **est une symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.**

Déterminons maintenant une matrice de s. Pour cela nous allons choisir une "bonne" base de E, c'est-à-dire une base adaptée aux propriétés de s. Considérons la décomposition

$$E = F_1 \oplus F_2$$

et choisissons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E telle que $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ soit une base de F_1 et $\{\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de F_2. On a donc

$$s(\overrightarrow{e_i}) = \text{évè}nement_i, \quad i = 1, \cdots, p$$

car $F_1 = \ker(s - Id)$ et donc $(s - Id)(\overrightarrow{v}) = 0$ pour tout $\overrightarrow{v} \in F_1$ et

$$s(\overrightarrow{e_j}) = -\text{évè}nement_j, \quad j = p+1, \cdots n$$

car $F_2 = \ker(s - +d)$ et donc $(s + Id)(\overrightarrow{v}) = 0$ pour tout $\overrightarrow{v} \in F_1$. On en déduit que la matrice de s relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ 0 & -Id_{n-p} \end{pmatrix}$$

où

$$I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice identité d'ordre k.

5.2. **Projections dans E.**

Définition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un endomorphisme de E*

$$p : E \to E$$

est appelé une projection si il vérifie

$$p \circ p = p.$$

Proposition 11. *Soit $p : E \to E$ une projection de E. Alors*

$$\operatorname{Im}(p) = \{\overrightarrow{v} \in E \text{ tels que } p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}$$

Démonstration. Comme pour tout $\overrightarrow{v} \in \{\overrightarrow{v} \in E$ tels que $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}$. Comme on a $p(p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v})$, alors $p(\overrightarrow{v}) \in \operatorname{Im}(p)$ et donc $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im}(p)$ et

$$\{\overrightarrow{v} \in E \text{ tels que } p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\} \subset \operatorname{Im}(p).$$

Inversement, soit $\overrightarrow{Y} \in \operatorname{Im}(p)$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que $Y = p(\overrightarrow{v})$. Ainsi

$$p(\overrightarrow{Y}) = p(p(\overrightarrow{v})) = p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{Y}$$

et donc $\overrightarrow{Y} \in \overrightarrow{v} \in \{\overrightarrow{v} \in E$ tels que $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}$. D'où la proposition.

Théorème 3. *Un endomorphisme $p : E \to E$ est une projection si et seulement si*

$$E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. Soit $\overrightarrow{v} \in ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors $p(\overrightarrow{v}) = 0$ et comme $\mathrm{Im}(p) = \{\overrightarrow{v} \in E$ tels que $p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}$, alors $\overrightarrow{v} = p(\overrightarrow{v}) = 0$. donc $\overrightarrow{v} = 0$.

Montrons que $E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$. Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Posons

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}), \quad \overrightarrow{v}_2 = p(\overrightarrow{v}).$$

On a alors

$$p(\overrightarrow{v}_1) = p(\overrightarrow{v}) - p(p(\overrightarrow{v})) = 0$$

et $\overrightarrow{v}_1 \in \ker(p)$, et aussi

$$p(\overrightarrow{v}_2) = p(p(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}_2$$

et donc $\overrightarrow{v}_2 \in \mathrm{Im}(p)$. Or

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) + p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$$

et donc tout vecteur de E peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de $\ker(p)$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}(p)$.

Définition 10. *Soit $p : E \to E$ une projection sur E. Comme $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, on dira que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.*

Il nous reste à déterminer une matrice de p. Choisissons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E adaptée à la décomposition $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, c'est-à-dire $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ est une base de $\ker(p)$ et $\{\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de $\mathrm{Im}(p)$. On a donc

$$p(\overrightarrow{e_i}) = 0, \quad i = 1, \cdots, p$$

et

$$p(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i}, \quad i = p+1, \cdots, n.$$

On en déduit la matrice de p dans cette base

$$M = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

où $0_p, 0_{p,n-p}, 0_{n-p,p}$ désignent des matrices nulles.