Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1. Physique-Chimie

Mathématiques : Outils Géométrie
Introduction à l'algèbre linéaire

Cours TD - Elisabeth Remm

EXERCICES Chapitre 1

Géométrie vectorielle du plan et de l'espace

Exercice 1. On considère un cube $ABCDEFG$ et sur ce cube les points I, J, K tels que I soit le centre de la face $BCGF$, K le milieu de $[HG]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Montrer que (AK) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 2. Soient les points $A = (2, 1, 1), B = (1, 0, 1), C = (3, -1, 2)$ et $D = (4, 0, 2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 3. Soient $A = (2, 3, -1)$ et $B = (-1, 5, 0)$ deux points de l'espace. Calculer $d(A, B)$ la distance entre ces deux points.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(1) Calculer $\det A$ et $\det B$.
(2) Calculer $A + B$ et $\det(A + B)$, et comparer à $\det A + \det B$.
(3) Calculer AB et $\det(AB)$, et comparer à $(\det A)(\det B)$.
(4) Calculer $\det(A^{2019})$ (sans calculer A^{2019}).

Exercice 6. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\textbf{a.} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \textbf{b.} \begin{cases} ax + by = 1 \\ -bx + ay = 0 \end{cases} \quad \textbf{c.} \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Exercice 7. Le plan géométrique est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points définis par leurs coordonnées $A(-6, 2)$, $B(-4, -2)$ et $C(4, 0)$.

(1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(2) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$.

(3) Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $0BDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 8. Est-ce que les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 3, 0)$ et $\vec{w} = (1, 0, 4)$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 9. Dans le plan euclidien, soit A, B, C les points de coordonnées $A(-1, -1)$, $B(1, 0)$ et $C(0, 1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés AB et AC et en déduire l'aire du triangle ABC. Dessiner ce parallélogramme.

Exercice 10. Soit $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Dans le plan euclidien, soit A, B, C les points de coordonnées $A(a, 0)$, $B(\dfrac{a}{2}, \dfrac{1}{2})$ et $C(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

(1) Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

(2) Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés AB et AC et en déduire l'aire du triangle ABC.

(3) En choisissant pour base AB, calculer la hauteur du triangle et vérifier le résultat de la question précédente

Exercice 11. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit ABC le triangle donné par $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ et $C(2, 4)$.

(1) Dessiner le triangle.

(2) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Calculer leurs normes puis l'angle géométrique α formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(3) Ecrire une équation cartésienne de la droite passant par B et C.

(4) Ecrire une équation cartésienne de la hauteur du triangle en A (c'est-à-dire la droite orthogonale à la droite BC et passant par A).

(5) Calculer les coordonnées de l'orthocentre du triangle (c'est-à-dire l'intersection des trois hauteurs du triangle).

Exercice 12. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(4, 0)$ et $B(1, 3)$ deux points et soit $\mathcal{T}$ le triangle OAB.

(1) Déterminer et dessiner les droites remarquables de $\mathcal{T}$: hauteurs, médianes et médiatrices.

(2) Déterminer le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit C et l'orthocentre H du triangle $\mathcal{T}$. Dessiner ces points.

(3) Montrer que G, C et H sont alignés.

(4) Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

Exercice 13. Dans une base orthonormée $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{a} = 5\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$, $\vec{b} = -2\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 6\vec{e_3}$, $\vec{c} = -3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{d} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$ et $\vec{e} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 3\vec{e_3}$.

(1) Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ et $\vec{e}$.

(2) Calculer les composantes et la norme des vecteurs $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{c}$.

(3) Calculer les produits scalaires $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{e}$ et $\vec{b}\cdot\vec{c}$.

(4) Calculer les produits vectoriels $\vec{a}\wedge\vec{b}$, $\vec{a}\wedge\vec{c}$, $\vec{a}\wedge\vec{e}$ et $\vec{b}\wedge\vec{c}$.

(5) Calculer le produit mixte $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

(6) Déterminer un vecteur unitaire $\vec{n}$ colinéaire au vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ et de même sens.

Exercice 14. Dans l'espace muni du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $A(1,1,1)$.

(1) Donner une représentation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}=(-2,3,-5)$.

(2) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et parallèle à (Ox).

(3) Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).

Exercice 15. Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(1) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{H}$ normal à $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ et contenant le point $P(2,-1,3)$.

(2) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{K}$ parallèle au plan d'équation $4x-3y-2z=11$ et passant par le point $Q(1,-5,7)$.

(3) Trouver une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{L}$ passant par le point $P(2,-1,3)$ et ayant la direction du vecteur $\vec{v}=4\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$.

(4) Trouver une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire au plan d'équation $2x-3y+7z=4$ et passant par le point $P(2,-1,3)$.