Faculté des Sciences et Techniques. Université de Haute Alsace

Licence 1. Physique-Chimie

Mathématiques : Outils Géométrie
Introduction à l'algèbre linéaire

Cours TD - Elisabeth Remm

EXERCICES Chapitre 5

Applications Linéaires

Exercice 1. Déterminer si les applications suivantes sont linéaires

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-1, x+y, 2y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y, 2y) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (xy, x-y) \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, y-2) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, 4x-2y) \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \qquad f_8 \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & Tr(M) \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & det(M) \end{array}$$

On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et $Tr(M)$ désigne la trace de M (si $M = (m_{ij})$, alors $Tr(M) = m_{11} + m_{22}$). Pour celles qui sont linéaires

(1) Ecrire leur matrice dans les bases canoniques
(2) Déterminer leur noyau et leur Image (on en donnera une base et la dimension)

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire déterminée par $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}$. Soit la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ avec $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

(1) Ecrire l'expression analytique de f et la matrice, notée A, de f dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
(2) Vérifier que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
(4) Calculer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(5) En déduire la matrice, notée B, de f dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
(6) Ecrire la matrice de passage P de la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ à la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
(7) Donner et vérifier une relation entre les matrices A, B et P.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire déterminée par $f(\vec{i})=2\vec{i}+\vec{j}$ et $f(\vec{j})=3\vec{i}$. Soit la famille $\{\vec{u},\vec{v}\}$ avec $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$.

(1) Ecrire la matrice A de f dans la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

(2) Vérifier que $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(3) Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(4) En déduire que la matrice de f dans la base $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est diagonale.

(5) Ecrire la matrice de passage P de la base $\{\vec{i},\vec{j}\}$ à la base $\{\vec{u},\vec{v}\}$ et vérifier que $PD=AP$.