FST Mulhouse.

Licence 1 Physique-Chimie

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Géométrie vectorielle du plan et de l'espace. Produit scalaire, Produit vectoriel, Déterminants

Table des matières

1.	Vecteurs dans l'espace	2
1.1.	Coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace	2
1.2.	Rappels sur les vecteurs	3
1.3.	Projection d'un vecteur sur les axes de coordonnées	3
1.4.	Cosinus directeurs d'un vecteur	4
1.5.	Operations sur les vecteurs	4
2.	La géométrie vectorielle dans l'espace	6
2.1.	Vecteurs coplanaires - Vecteurs linéairement indépendants	6
2.2.	Matrice et déterminant	8
2.3.	Bases de l'espace	10
2.4.	Repères utilisés en mécanique	10
3.	Produit scalaire	12
3.1.	Définition	12
3.2.	Deuxième définition du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$	13
4.	Produit vectoriel, produit mixte dans $\mathbb{R}^3$	15
4.1.	Vecteur directeur d'un plan, produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$	15
4.2.	Le déterminant et le produit vectoriel	16
4.3.	Le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$	17
5.	Equations des plans et droites dans $\mathbb{R}^3$	18
5.1.	Plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$	18

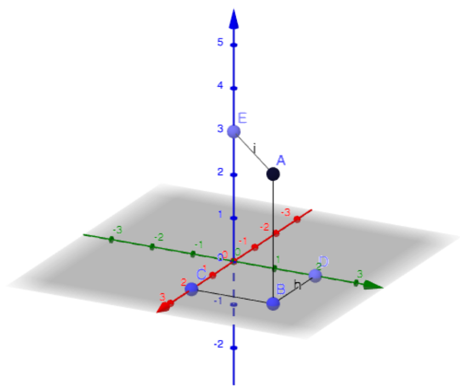
5.2. Droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ 20
5.3. Projection orthogonale dans le plan 22
5.4. Plans et droites affines dans $\mathbb{R}^3$ 23
6. Comment calculer le déterminant en utilisant le langage PYTHON. 24

1. Vecteurs dans l'espace

1.1. **Coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace.** Un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ dans l'espace est défini par la donnée d'une unité de mesure de longueurs et de trois axes Ox, Oy, Oz perpendiculaires deux à deux au point O.

Soit A un point de l'espace. On le projette parallèlement à Oz sur le plan Oxy. Soit B ce projeté. On notera par x_A et y_A les projetés de B sur Ox et Oy parallèlement à Oy et Ox et par z_A le projeté sur Oz de A parallèlement au plan Oxy. Alors (x_A, y_A, z_A) sont les coordonnées rectangulaires du point A. Ainsi à chaque point A on fait correspondre un et un seul triplet (x_A, y_A, z_A). Inversement, à chaque triplet (x, y, z) correspond un et un seul point de l'espace dont ce triplet représente les coordonnées rectangulaires.

Figure 1. Projection du point A



1.2. **Rappels sur les vecteurs.** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace (ou du plan). Rappelons qu'il est caractérisé par

(1) sa direction (une droite)
(2) son sens
(3) et sa longueur notée $||\vec{u}||$.

On peut le représenter par une flèche (orientée). Tout couple ordonné de points (A, B) de l'espace définit un vecteur que l'on note $\overrightarrow{AB}$. Le point A s'appelle l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son extrémité. La distance entre A et B est la longueur de $\overrightarrow{AB}$. Le vecteur (A, A) ou $\overrightarrow{AA}$ se notera $\overrightarrow{0}$ car sa longueur est nulle. Deux couples de bipoints (A, B) et (C, D) définissent le même vecteur $\vec{u}$ s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. On écrira alors

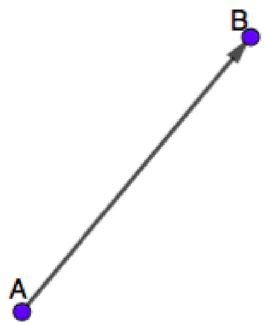
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}.$$

.

Proposition 1. *Etant donnés un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

FIGURE 2. Vecteur



1.3. **Projection d'un vecteur sur les axes de coordonnées.** Le projeté du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe Ox est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ tel que A' soit le projeté orthogonal de A sur Ox et B' celui de B.

Notons par X la mesure algébrique de $\overrightarrow{A'B'}$, c'est-à-dire $X = \overline{A'B'}$ (rappelons que $\overline{A'B'} = A'B'$ si $\overrightarrow{A'B'}$ est dirigé dans le sens de Ox et $-A'B'$ dans le cas contraire. De même soient Y et Z les mesures algébriques des projetés orthogonaux de $\overrightarrow{A'B'}$ sur Oy et Oz. Par définition, on dira que (X, Y, Z) sont les composantes algébriques de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $Oxyz$.

Théorème 1. *Soient les points $A = (x_1, y_1, z_1)$ et $B = (x_2, y_2, z_2)$. Alors les composantes algébriques de $\overrightarrow{AB}$ sont*

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

1.4. **Cosinus directeurs d'un vecteur.** Considérons le vecteur $\overrightarrow{a} = (X, Y, Z)$ que l'on peut représenter par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ où A a pour composantes (X, Y, Z). Considérons les points A_x, A_y, A_z sur les axes Ox, Oy et Oz tels que

$$\overline{OA_x} = X,\ \overline{OA_y} = Y,\ \overline{OA_z} = Z.$$

On a alors

$$OA^2 = OA_x^2 + OA_y^2 + OA_z^2.$$

Ainsi

$$|\overrightarrow{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

et donc

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Soient
α l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Ox,
β l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Oy,
γ l'angle du vecteur $\overrightarrow{a}$ avec l'axe Oz.
On a alors

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

Définition 1. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ *sont appelés les cosinus directeurs du vecteur* $\overrightarrow{a}$ *relatifs au repère fixé* $Oxyz$.

1.5. **Operations sur les vecteurs.**

1.5.1. *L'addition.* Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. On construit le vecteur $\vec{a}+\vec{b}$ de la façon suivante : Soient A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Alors $\vec{a} + \vec{b}$ est égal à $\overrightarrow{OC}$ où $OABC$ est un parallélogramme. Cette construction correspond à la résultante de deux forces s'exerçant au point O.

En termes de composantes l'addition vérifie :

Proposition 2. *Soient* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *deux vecteurs de composantes* (X_a, Y_a, Z_a) *et* (X_b, Y_b, Z_b). *Alors*

$$\vec{a} + \vec{b} = (X_a + X_b, Y_a + Y_b, Z_a + Z_b).$$

L'addition vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.

$$(1)\qquad \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \\ \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}, \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}. \end{cases}$$

Théorème 2. *Relation de Chasles. Soient A, B, C trois points. Alors*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Démonstration. Posons $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Alors

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ \overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3) \\ \overrightarrow{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3) \end{array}$$

D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} &= (b_1 - c_1 + c_1 - a_1, b_2 - c_2 + c_2 - a_2, b_3 - c_3 + c_3 - a_3), \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \\ &= \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

1.5.2. *Multiplication par un scalaire.* Soit $\vec{a}$ un vecteur et $k \in \mathbb{R}$ un scalaire. Le vecteur $k\vec{a}$ est colinéaire à $\vec{a}$, de longueur $|k||\vec{a}|$ et de même sens si $k > 0$ ou de sens inverse si $k < 0$.

Si $\vec{a} = (X, Y, Z)$ alors

$$k\vec{a} = (kX, kY, kZ).$$

Cette multiplication par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}, \\ (k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_1\vec{a}, \\ 0\vec{a} = \vec{0}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Remarque : Structure d'espace vectoriel. Si nous notons par E l'ensemble des vecteurs dans l'espace, les deux opérations que sont l'addition et la multiplication externe vérifiant les propriétés (1) et (2) munissent E d'une structure d'espace vectoriel réel. Nous développerons cette notion plus tard.

Définition 2. *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}.$$

Proposition 5. *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls. Alors si $\vec{a} = (X_a, Y_a, Z_a)$ et $\vec{b} = (X_b, Y_b, Z_b)$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si*

$$\frac{X_a}{X_b} = \frac{Y_a}{Y_b} = \frac{Z_a}{Z_b}$$

dès que $X_b Y_b Z_b \neq 0$.

Démonstration. En effet $\vec{b} = k\vec{a}$ implique

$$X_b = kX_a, Y_b = kY_a, Z_b = kZ_a.$$

Si $X_B Y_b Z_b \neq 0$, on en déduit

$$\frac{X_a}{X_b} = \frac{Y_a}{Y_b} = \frac{Z_a}{Z_b}.$$

2. La géométrie vectorielle dans l'espace

2.1. **Vecteurs coplanaires - Vecteurs linéairement indépendants.** Rappelons que trois points de l'espace A, B, C sont alignés s'il existe un scalaire k tel que
$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$
En particulier la droite (AB) est l'ensemble des points M tels qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}.$$

Considérons à présent trois points A, B, C non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe des scalaires $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ pour lesquels nous avons
$$\overrightarrow{AM} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}.$$
On dira alors que la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est une base ou un repère du plan (ABC).

Définition 3. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont dits coplanaires ou linéairement dépendants si les points A, B, C, D définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent à un même plan.*

Définition 4. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont dits linéairement indépendants si l'équation*
$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{0}$$
implique
$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

Ceci signifie que les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires. Cette notion de linéaire indépendance peut concerner également une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$: Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sont dits linéairement indépendants si l'équation
$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0}$$
implique
$$k_1 = k_2 = 0.$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ nous avons bien entendu une définition semblable :

Définition 5. *Deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont dits linéairement indépendants si l'équation*
$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0}$$
implique
$$k_1 = k_2 = 0.$$

Exemples.

(1) Montrons sur un exemple que les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (0, 1, 1)$ sont linéairement indépendants. Considérons l'équation vectorielle
$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{0}.$$
Elle se traduit par
$$k_1(1, 1, 0) + k_2(1, 0, 1) + k_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

soit

$$(k_1,k_1,0)+(k_2,0,k_2)+(0,k_3,k_3)=(k_1+k_2,k_1+k_3,k_2+k_3)=(0,0,0).$$

On en déduit le système linéaire

$$\begin{cases} k_1+k_2 & =0 \\ k_1+k_3 & =0 \\ k_2+k_3 & =0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. La première équation donne $k_2=-k_1$, la deuxième $k_3=-k_1$. En reportant ces valeurs dans la troisième équation, on trouve

$$k_2+k_3=-k_1-k_1=-2k_1=0$$

d'où $k_1=0$ et donc $k_2=k_3=0$. Les vecteurs sont bien indépendants.

(2) Un exemple de vecteurs linéairement dépendants. Considérons les vecteurs $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,-1,0), \vec{w}=(2,0,1)$. Pour savoir si ces vecteurs sont linéairement dépendants ou indépendants, on procède comme ci-dessus : Considérons l'équation vectorielle

$$k_1\vec{u}+k_2\vec{v}+k_3\vec{w}=\vec{0}.$$

Elle se traduit par

$$k_1(1,1,1)+k_2(1,-1,0)+k_3(2,0,1)=(0,0,0)$$

soit

$$(k_1,k_1,k_1)+(k_2,-k_2,0)+(2k_3,0,k_3)=(k_1+k_2+2k_3,k_1-k_2,k_1+k_3)=(0,0,0).$$

On en déduit le système linéaire

$$\begin{cases} k_1+k_2+2k_3 & =0 \\ k_1-k_2 & =0 \\ k_1+k_3 & =0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. La deuxième équation donne $k_2=k_1$, la troisième $k_3=-k_1$. En reportant ces valeurs dans la deuxième équation, on trouve

$$k_1+k_2+2k_3=-k_+-k_1-2k_1=0$$

qui donc cette équation se ramène à $0=0$. On en déduit que le système linéaire donne comme solution

$$k_2=k_1,\ \ k_3=-k_1$$

et ces constantes ne sont pas nécessairement toutes nulles. Les vecteurs sont linéairement dépendants. Une relation de dépendance est donnant en prenant par exemple $k_1=1$ (et surtout pas 0) :

$$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}.$$

(3) Remarquons tout d'abord que quatre vecteurs ou plus de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement dépendants. En effet la résolution du système linéaire qui se déduit de l'équation vectorielle

$$k_1\vec{u_1}+k_2\vec{u_2}+k_3\vec{u_3}+k_4\vec{u_4}=\overrightarrow{0}$$

donne des solutions non toutes nulles.

2.2. **Matrice et déterminant.** Une méthode bien pratique pour montrer que *deux* vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants ou non repose sur la notion de déterminants, notion que nous verrons en détail dans les chapitres suivants. Tout d'abord soient deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6. *On appelle matrice de ces deux vecteurs le tableau* 2 *lignes et* 2 *colonnes obtenu en mettant en colonne les composantes de chacun des vecteurs soit*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

On appelle Déterminant de cette matrice le scalaire

$$\det(M) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(produit en croix).

On a le résultat suivant :

Théorème 3. *Deux vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

de ces deux vecteurs vérifie

$$\det(M) \neq 0.$$

Prenons par exemple les vecteurs $(1, 1)$ et $(-1, 2)$. La matrice de ces deux vecteurs est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$\det(M) = 1 \times 2 - (-1) \times 1 = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

donc les vecteurs sont indépendants. Considérons maintenant les vecteurs $(1, 2)$ et $(2, 4)$. La matrice de ces deux vecteurs est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$\det(M) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$$

donc les vecteurs sont dépendants.

Dans $\mathbb{R}^3$ nous avons une notion analogue.

Définition 7. *On appelle matrice de trois vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$, le tableau* 3 *lignes et* 3 *colonnes obtenu en mettant en colonne les composantes de chacun des vecteurs soit*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

On appelle Déterminant de cette matrice le scalaire

$$\det(M) = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_3).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 4. *Trois vecteurs* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement indépendant si et seulement si la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

de ces deux vecteurs vérifie

$$\det(M) \neq 0.$$

Reprenons les exemples ci-dessus. Considérons les vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 0), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (0, 1, 1)$. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut

$$\det(M) = 1(0-1) - 1(1-0) + 0(1-0) = -1 - 1 + 0 = -2 \neq 0$$

et ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Considérons à présent les trois vecteurs $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0), \vec{w} = (2, 0, 1)$. La matrice associée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut

$$\det(M) = 1(-1-0) - 1(0+1) + 2(0+1) = -1 - 1 + 2 = 0$$

et ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Une règle pratique pour calculer le déterminant d'une matrice 3 **lignes et** 3 **colonnes : la règle de Sarrus.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

On recopie les deux premières lignes

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

et on ajoute tous les produits de trois facteurs alignés du Nord Ouest au Sud Est et on retranche les produits de trois facteurs alignés du Nord Est au Sud Ouest :

$$x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - (x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1).$$

2.3. **Bases de l'espace.**

Définition 8. *Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace linéairement indépendants définissent une base de l'espace.*

Par exemple les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ des trois axes de coordonnées définis au premier paragraphe forment une base de l'espace.

Théorème 5. *Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ une base de l'espace. Tout vecteur $\vec{a}$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{a} = x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w}.$$

Les scalaires x_1, x_2, x_3 s'appellent les composantes de $\vec{a}$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

2.4. **Repères utilisés en mécanique.**

2.4.1. *Repères et coordonnées d'un point.* Dans le premier paragraphe nous avons défini un repère en considérant un point O, trois axes Ox, Oy et Oz orientés par les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Généralisons cette construction. Soit une base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ et soit un point K de l'espace. Par K faisons passer 3 axes Kx_1,Kx_2,Kx_3 orientés par les vecteurs de la base donnée. On définit ainsi un nouveau repère $(K, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ d'origine K et de base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Un des problèmes importants que l'on rencontre en mécanique est de savoir écrire les coordonnées d'un point de l'espace dans le permier et dans le deuxième repère et surtout comment on passe d'un système à l'autre. Ainsi dans le premier repère on aura

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et dans le deuxième

$$\overrightarrow{KP} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_1\vec{w}.$$

Or on a

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP}.$$

Soit (a, b, c) les coordonnées de K dans le premier repère (dans le deuxième elles sont nulles) :

$$\overrightarrow{OK} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

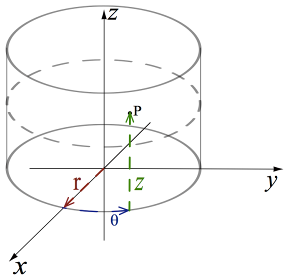
D'où

$$\overrightarrow{KP} = -(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}.$$

Si nous voulons calculer les composantes (x_1, y_1, z_1) de P relatives au deuxième repère en fonction des composantes (x, y, z) de ce même point par rapport au premier repère, il ne reste plus qu'à remplacer les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en fonction de leurs composantes dans le prmier repère :

$$\begin{cases} \vec{u} = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k} \\ \vec{v} = \alpha_2\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \gamma_2\vec{k} \\ \vec{w} = \alpha_3\vec{i} + \beta_3\vec{j} + \gamma_3\vec{k} \end{cases}$$

FIGURE 3. Coordonnées cylindriques



2.4.2. *Le repère cylindropolaire.* Ce repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$ est centré en O mais la base $\{\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k}\}$ est liée au point P que l'on considère. Soit Q le projeté de P sur le plan Oxy. Son considère l'axe porté par $\overrightarrow{OQ}$ et on note $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire orienté comme $\overrightarrow{OQ}$. Ainsi

$$\overrightarrow{OQ} = r\overrightarrow{e_r}$$

avec $r \geq 0$. Soit

$$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ})$$

On considère dans le plan Oxy le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\theta}$ orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ tel que $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}) = +\pi/2$. Le repère considéré est donc $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$. Dans ce repère, on a

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e_r} + 0\overrightarrow{e_\theta} + z\vec{k}.$$

Le "changement de base" est donné par

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}. \end{cases}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\theta\vec{i} + r\sin\theta\vec{j} + z\vec{k} = x_P\overrightarrow{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$$

et donc

$$\begin{cases} x_P = r\cos\theta \\ y_P = r\sin\theta \\ z_P = z_P \end{cases}$$

Notons que les coordonnées cylindriques de P sont particulièrement simples : $(r, 0, z)$. Cela vient du fait que le repère, bien que fixé en O est un repère "mobile" dépendant de P. En cinématique, lorsque P bouge, ce repère aussi. Le mouvement est donc décrit par le mouvement de ce repère et le mouvement relatif de P dans ce repère.

2.4.3. *Le repère mobile.* L'étude de ce repère n'a de sens que dans le domaine de la cinématique, lorsqu'on veut étudier le déplacement d'un point. Ce repère est centré sur ce point et donc les coordonnées de ce point sont nulles, mais ce n'est pas cette remarque qui en fait son intérêt. Les axes de ce repère sont portés par le vecteur tangent à la trajectoire associé à la vitesse du point, un vecteur orthogonal à ce vecteur tangent dans le plan de base les vecteurs vitesse et accélération et le troisième axe donné par le produit vectoriel des deux vecteurs de base. L'étude de la trajectoire du point P se ramène à l'étude du comportement du repère mobile. L'intérêt de cette étude de la variation de ce repère en fonction du déplacement du point P réside dans le fait que cette étude donne exactement le nombre minimum, ici 2, de fonctions permettant une description complète de la trajectoire, ces fonctions étant la courbure et la torsion.

3. Produit scalaire

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

où les x_i sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ donnée.

3.1. **Définition.**

Définition 9. *On appelle produit scalaire euclidien dans l'espace vectoriel réel* $\mathbb{R}^3$*, l'application de* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Cette application a les propriétés suivantes : Pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \in \mathbb{R}^3$,

(1) $(\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2}) \cdot \overrightarrow{Y} = \alpha_1(\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{Y}) + \alpha_2(\overrightarrow{X_2} \cdot \overrightarrow{Y})$,

(2) $\overrightarrow{X} \cdot (\alpha_1\overrightarrow{Y_1} + \alpha_2\overrightarrow{Y_2}) = \alpha_1(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_1}) + \alpha_2(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y_2})$

Une telle application, a deux variables de $\mathbb{R}^3$, vérifiant les deux propriétés ci-dessus est appelée une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$. L'étude générale de telles applications sur un espace vectoriel réel ou complexe seront étudiées plus tard.

Quelques propriétés du produit scalaire euclidien

(1) Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3$. Alors l'identité

$$\forall \overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$

implique $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration. En effet, posons $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$. Prenons dans un premier temps $\overrightarrow{Y} = \vec{i} = (1, 0, 0)$. Alors $\overrightarrow{X} \cdot \vec{i} = 0$ implique $x_1 = 0$. De même, en prenant $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{j}$ et $\vec{k}$, nous obtenons $x_i = 0$ et en déduisons $\overrightarrow{X} = 0$.

(2) Pour tout $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3$ non nul

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} > 0.$$

En effet $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

(3) Le produit scalaire est commutatif :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{X}.$$

Lorsque nous considèrerons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire euclidien, nous parlerons alors de $\mathbb{R}^n$ comme espace euclidien.

Définition 10. *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on appelle norme du vecteur $\overrightarrow{X}$, le scalaire*
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{X}}.$$

Nous avons donc, si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$,
$$||\overrightarrow{X}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$
et la norme correspond à la longueur du vecteur.

Proposition 6. *(Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) Pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$, nous avons*
$$|\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}| \leq ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||$$
et
$$||\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}|| \leq ||\overrightarrow{X}|| + ||\overrightarrow{Y}||.$$

Nous remarquons que l'égalité pour ces deux relations n'a lieu que lorsque $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont colinéaires.

Remarque. Cas de $\mathbb{R}^2$ Il est clair que cette définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ se particularise aisément au cas du plan : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs du plan, alors
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$
Ces vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul.

3.2. **Deuxième définition du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$.** Commençons par interpréter le produit scalaire dans le plan, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ deux vecteurs du plan
$$\overrightarrow{X_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{X_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}.$$
Nous avons
$$\left| \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\| \left\|\overrightarrow{X_2}\right\|} \right| \leq 1.$$
En effet $(x_1x_2+y_1y_2)^2 \leq (x_1+y_1)^2(x_2+y_2)^2$. Nous pouvons donc interpréter ce nombre comme le cosinus d'un angle, mais ceci nécessite que l'angle formé par les deux vecteurs de base soit un angle droit.

Ainsi, par définition
$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{X_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{||\overrightarrow{X_1}||\ ||\overrightarrow{X_2}||}$$
et θ désigne l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{X_2}$ du plan.

Théorème 6. *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors*
$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = ||\overrightarrow{X}||\ ||\overrightarrow{Y}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$
où $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ désigne l'angle des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$.

Considérons le plan euclidien, sa base canonique, et les deux vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2)$ représentés classiquement par le graphe suivant

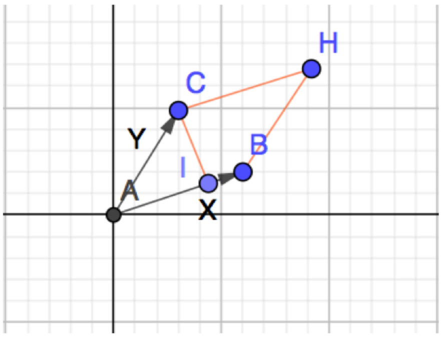


FIGURE 4. Parallelogramme construit sur deux vecteurs.

Considérons le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont supportés par les vecteurs donnés. Son aire est égale à $AB \times CI$. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

des deux vecteurs. Rappelons que son déterminant est $\det(M) = x_1y_2 - x_2y_1$. Si $\overrightarrow{Z}$ est le vecteur $\overrightarrow{Z} = (-y_2, y_1)$, alors

$$\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z} = 0, \ \det M = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}.$$

Mais $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z} = ||\overrightarrow{X}|| \, ||\overrightarrow{Z}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z})$. Comme $\cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z}) = \cos((\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) + \pi/2) = -\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$, nous obtenons

$$\det M = -||\overrightarrow{X}|| \, ||\overrightarrow{Y}|| \sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

et donc

$$|\det M| = AB \times CD \times |\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})| = AB \times CI.$$

Ainsi

Proposition 7. *Le déterminant de deux vecteurs exprimés dans une base orthonormée est égal, en valeur absolue, à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

4. Produit vectoriel, produit mixte dans $\mathbb{R}^3$

4.1. **Vecteur directeur d'un plan, produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.** Nous pouvons toujours ramener la définition d'un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine comme l'ensemble des points $M = (x_1, x_2, x_3)$ ou des vecteurs $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{OM} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation linéaire

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Cette équation n'est unique qu'à un coefficient multiplicatif près. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A} = (a, b, c)$ défini par cette équation. Alors l'équation linéaire correspond au produit scalaire

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Les éléments du plan $\mathcal{P}$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{A}$. Ce vecteur $\overrightarrow{A}$ s'appelle un vecteur directeur du plan, tout autre vecteur directeur s'écrit $\lambda\overrightarrow{A}$ avec $\lambda \neq 0$.

Détermination d'un vecteur directeur : le produit vectoriel Supposons que nous connaissions une base $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Un vecteur directeur est orthogonal à $\overrightarrow{X}$ et à $\overrightarrow{Y}$. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A}$ de composante $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. On vérifie aisément que

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0,\ \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Vérifions uniquement la première identité :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = 0.$$

Ainsi ce vecteur $\overrightarrow{A}$ est un vecteur directeur du plan de base $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$.

Définition 11. *Soient* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, noté* $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ *est le vecteur de composantes*

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nous avons démontré ci-dessus la propriété suivante

Proposition 8. *Si les vecteurs* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ *sont linéairement indépendants, alors* $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ *est orthogonal au plan engendré par* $\overrightarrow{X}$ *et* $\overrightarrow{Y}$*. C'est dons un vecteur directeur de ce plan.*

Nous en déduisons aussi

Corollaire 1. *Les deux vecteurs* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ *sont linéairement indépendants si et seulement si* $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} \neq \overrightarrow{0}$*.*

Démonstration. En effet, si $\overrightarrow{Y} = \lambda\overrightarrow{X}$, alors si nous calculons $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ nous trouvons bien le vecteur nul.

Lemme 1. *Pour tout* $\overrightarrow{X}$ *et* $\overrightarrow{Y}$ *dans* $\mathbb{R}^3$*, on a*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot Y)^2.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}||^2 &= ((x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2 \\ &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2 \\ = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2(\overrightarrow{X}\cdot Y)^2 \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\frac{||\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2}+\frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2}=1.$$

Or

$$\frac{(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2}=\cos^2\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})$. Ainsi

$$\frac{||\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta.$$

On en déduit

Proposition 9. *Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. alors*

$$||\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}||=||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}||\sin\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})$.

Sur la base canonique, le produit vectoriel se comporte ainsi :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_1}\wedge\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{e_1}, \\ \overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2}, & \overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_2}=-\overrightarrow{e_1}, & \overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}. \end{array}$$

Nous en déduisons les propriétés algébriques du produit vectoriel : pour tout $\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y},\overrightarrow{Z}\in\mathbb{R}^3$

(1) $\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}=-\overrightarrow{Y}\wedge\overrightarrow{X}$,

(2) $\overrightarrow{X}\wedge(a\overrightarrow{Y}+b\overrightarrow{Z})=a\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}+b\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Z}$,

(3) $(\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y})\wedge\overrightarrow{Z}+(\overrightarrow{Y}\wedge\overrightarrow{Z})\wedge\overrightarrow{X}+(\overrightarrow{Z}\wedge\overrightarrow{X})\wedge\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{0}$.

La dernière identité montre que le produit vectoriel n'est pas une opération associative.

4.2. **Le déterminant et le produit vectoriel.** Rappelons que si

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

son determinant se calcule, par exemple, à l'aide de la règle de Sarrus

$$\begin{aligned} \det A = \ & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} \\ & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}-a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \end{aligned}$$

Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{X}=(x_1,x_2,x_3),\ \overrightarrow{Y}=(y_1,y_2,y_3),\ \overrightarrow{Z}=(z_1,z_2,z_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ces trois vecteurs est obtenue en mettant en colonne les composantes de ces trois vecteurs :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est

$$\det M = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + x_2y_3z_1 - z_2y_2x_3 - z_3y_3x_1 - y_1x_2z_3.$$

Nous pouvons l'écrire comme un produit scalaire :

$$\det M = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_3).$$

Rappelons que

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3).$$

Alors

$$\det M = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

Notons que pour les mêmes raisons, nous aurons aussi

$$\det M = (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \cdot \overrightarrow{Y} = (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \cdot \overrightarrow{X}.$$

On prêtera attention à l'ordre d'écriture des vecteurs.

4.3. **Le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$.**

Définition 12. *On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$, le nombre*

$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}).$$

L'expression analytique de ce produit mixte est

$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

On en déduit immédiatement

$$\overrightarrow{X} \cdot (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

De plus, d'après les résultats du paragraphe précédent, le produit mixte est égal au déterminant de la matrice des trois vecteurs $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$.

Proposition 10. *Le volume du parallélépipède supporté par trois vecteurs linéairement indépendants est égal en valeur absolue produit mixte de ces trois vecteurs.*

Nous supposons les trois vecteurs indépendants, sinon le parallélépipède serait un peu plat. Rappelons que le volume est égal au produit d'une base par la hauteur issue de cette base.

5. Equations des plans et droites dans $\mathbb{R}^3$

5.1. **Plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$.** Rappelons qu'un plan vectoriel $\mathcal{P}$ est un plan passant par le point O. Nous verrons dans le chapitre suivant que dans ce cas $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il existe deux façons de présenter un tel plan :

(1) On écrit les conditions pour qu'un point $M \in \mathbb{R}^3$ soit dans $\mathcal{P}$, et dans ce cas on donne l'équation cartésienne de ce plan :
$$ax + by + cz = 0$$
et tout point $M = (x, y, z) \in \mathcal{P}$ vérifie cette équation. Notons que cette équation linéaire définie bien un plan si et seulement si l'un des coefficients a, b, c est non nul.

(2) On se donne une base de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire deux vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires et on écrit que tout vecteur dans $\mathcal{P}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de cette base. dans ce cas on donne les équations paramétriques. Soient $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ une base de $\mathcal{P}$ (rappelons que l'on identifie tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ avec le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$. Soit $M \in \overrightarrow{P}$. Alors, comme $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une base de $\mathcal{P}$, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\overrightarrow{OM} = t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2}.$$
Cette équation vectorielle donne directement les équations paramétriques de $\overrightarrow{P}$: si $M = (x, y, z)$ alors
$$(x, y, z) = t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2)$$
soit
$$\begin{cases} x = a_1t_1 + a_2t_2, \\ y = b_1t_1 + b_2t_2, \\ z = c_1t_1 + c_2t_2 \end{cases}$$
avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Lorsque les "paramètres t_1 et t_2 varient dans $\mathbb{R}$, le point M parcours tout le plan.

Ces deux présentations de $\mathcal{P}$ sont équivalentes. Nous allons voir dans l'exemple qui suit comment passer de l'une à l'autre.

Exemples

(1) **Trouver les équations paramétriques du plan à partir d'une équation cartésienne.** Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel d'équation cartésienne
$$x + y + 2z = 0.$$
Cherchons une représentation paramétrique. Pour cela il faut en premier lieu trouver une base, les équations dépendent du choix de cette base. Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{P}$. Alors
$$x + y + 2z = 0$$
soit
$$x = -y - 2z.$$
On en déduit que $M = (x, y, z) = (-y - 2z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. On a donc une base formée des vecteurs
$$\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{v_2} = (-2, 0, 1)$$

On en déduit le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -t_1 - 2t_2, \\ y = t_1, \\ z = t_2. \end{cases}$$

Comme nous l'avons dit, ce système dépend du choix de la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Donnons nous une autre base, par exemple $\{\overrightarrow{w_1} = (1,1,-1), \overrightarrow{w_2} = (3,-1,-1)\}$. Ces deux vecteurs sont bien dans $\mathcal{P}$ et ne sont pas colinéaires, ils forment bien une base de $\mathcal{P}$. Les équations paramétriques correspondantes sont données par

$$\overrightarrow{OM} = u_1\overrightarrow{w_1} + u_2\overrightarrow{w_2}$$

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. On a donc dans ce cas le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = u_1 + 3u_2, \\ y = u_1 - u_2 \\ z = -u_1 - u_2 \end{cases}$$

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Bien entendu, ce système est équivalent au premier.

(2) **Trouver une équation cartésienne du plan à partir des équations paramétriques.** Soit le plan vectoriel $\mathcal{P}_\infty$ défini par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t_1 + 2t_2, \\ y = t_1 - t_2 \\ z = 2t_1 + 3t_2. \end{cases}$$

Une première manière de trouver une équation cartésienne est d'élimer les paramètres t_1 et t_1. Ainsi la première équation donne $t_1 = x - 2t_2$. Portons cette valeur dans la deuxième : $y = x - 2t_2 - t_2 = x - 3t_2$ ce qui donne $3t_2 = x - y$. Reportons ces deux valeurs dans la troisème équation

$$z = 2(x - 2t_2) + x - y = 3x - y - \frac{4}{3}(x - y) = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y$$

soit

$$5x + y - 3z = 0.$$

On a donc bien une équation cartésienne. Notons que cette équation n'est pas unique, toute autre s'écrit $\lambda(5x + y - 3z) = 0$.

Il existe une autre méthode, plus rapide peut-être, basée sur la propriété suivante. Les équations paramétriques sont équivalentes à

$$\overrightarrow{OM} = t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2}$$

avec $\overrightarrow{v_1} = (1,1,2), \overrightarrow{v_2} = (2,-1,3)$ Comme $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$, les vecteurs $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ sont liés par la relation $\overrightarrow{OM} = t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2}$ et donc le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs est nul. Cette matrice est

$$M = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\det M = 3x - z + 4y - 2z - 3y + 2x = 5x + y - 3z$$

(calculé par la méthode de Sarrus), une équation cartésienne est

$$4x + y - 3z = 0.$$

5.2. **Droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.** On appelle droite vectorielle $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^3$ toute droite passant par O. Dans ce cas aussi, nous avons deux présentations

(1) Les équations cartésiennes, déduites du fait que toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans vectoriels :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{cases}$$

Pour que cette droite soit bien définie, on suppose que les deux équations soient indépendantes, c'est-à-dire que l'une n'est pas un multiple de l'autre et qu'au moins un coefficient dans chacune d'elles est non nul.

(2) Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de cette droite (contrairement au cas du plan où le vecteur directeur est orthogonal au pla, ici il est porté par la droite). Pour tout point $M = (x, y, z)$ de la droite, on a alors l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{v}.$$

Cette équation vectorielle est équivalente au système d'équations paramétriques de la droite : si $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ alors

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \\ z = ct, \end{cases}$$

avec $t \in \mathbb{R}$.

Exemple.

(1) **Trouver les équations paramétriques de la droite à partir des équations cartésiennes.** Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $z = 2x - y$ et reportant ceci dans le première équation, on obtient

$$x + y + 2x - y = 3x = 0$$

D'où $x = 0, z = -y$. Tout point de la droite a pour coordonnées $(0, y, -y)$. Considérons le vecteur $\vec{V} = (0, 1, -1)$. On a bien pour tout $M \in \mathcal{D}$

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{V} = t(0, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit les équations paramétriques de la droite

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases}$$

(2) **Trouver les équations cartésiennes de la doite à partir des équations paramétriques.** Considérons la droite $\mathcal{D}$ donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = -3t. \end{cases}$$

On élimine t entre la première et deuxième équation, soit

$$y = -2x.$$

On élimine t entre la première et troisième équation soit

$$z = 3x.$$

Les équations cartésiennes sont donc

$$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

Exercices corrigés. 1.Trouver les équations paramétriques du plan à partir de l'équation cartésienne Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$2x + 3y - z = 0.$$

Cherchons une base de ce plan. On a

$$z = 2x + 3y$$

et si $M = (x, y, z)$ est un point du plan, alors ses coordonnées sont

$$(x, y, 2x + 3y).$$

On en déduit

$$(x, y, 2x + 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3).$$

Les vecteurs

$$\overrightarrow{V_1} = (1, 0, 2),\ \overrightarrow{V_2} = (0, 1, 3)$$

forment une base de $\mathcal{P}$ car ils sont non colinéaires générateurs (tout point se décompose sur ces deux vecteurs). Cherchons les équations paramétriques. Si $M = (x, y, z) \in \mathcal{P}$, alors

$$(x, y, z) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3).$$

Les équations paramétriques sont donc

$$\begin{cases} x = & t_1 \\ y = & t_2 \\ z = & 2t_1 + 3t_2 \end{cases}$$

2. Trouver les équations paramétriques de la droite à partir des équations cartésiennes. Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $z = 2x - y$ et reportant ceci dans le première équation, on obtient

$$x + y + 2x - y = 3x = 0$$

D'où $x = 0, z = -y$. Tout point de la droite a pour coordonnées $(0, y, -y)$. Considérons le vecteur $\vec{V} = (0, 1, -1)$. On a bien pour tout $M \in \mathcal{D}$

$$\overrightarrow{OM} = t\vec{V} = t(0, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit les équations paramétriques de la droite

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -t. \end{cases}$$

5.3. **Projection orthogonale dans le plan.** Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$. Si $\overrightarrow{v_1} = (a, b)$ en est une base, l'équation linéaire définissant cette droite s'obtient en écrivant que tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$: $\overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{v_1}$ soit $(x_1, x_2) = \lambda(a, b)$. Ainsi, nous avons "les équations paramétriques" de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a \\ x_2 = \lambda b \end{cases}$$

L'équation linéaire s'obtient en éliminant le paramètre λ entre ces deux équations : Supposons $a \neq 0$. Alors $\lambda = x_1 a^{-1}$ d'où $x_2 = x_1 a^{-1} b$ et donc

$$a^{-1} b x_1 - x_2 = 0$$

ou bien, après multiplication par a

$$b x_1 - a x_2 = 0.$$

Cette équation cartésienne de $\mathcal{D}$ s'interprète donc en disant que tout vecteur $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{D}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$ qui est une base de $\mathcal{D}^{\top}$. Si $a = 0$, alors l'équation de $\mathcal{D}$ se résume à $x_1 = 0$. Revenons au cas $a \neq 0$. Ceci étant, d'après le calcul que nous venons de faire, l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}^{\perp}$ orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ est

$$a x_1 + b x_2 = 0.$$

Une base est donnée par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2$. Déterminons le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$. Pour cela nous devons calculer les composantes x'_1, x'_2 de $\overrightarrow{X}$ relative à la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

$$\overrightarrow{X} = x'_1\overrightarrow{v_1} + x'_2\overrightarrow{v_2} = (a x'_1 + b x'_2)\overrightarrow{e_1} + (b x'_1 - a x'_2)\overrightarrow{e_2} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} x_1 = a x'_1 + b x'_2 \\ x_2 = b x'_1 - a x'_2 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{a}{a^2 + b^2} x_1 + \dfrac{b}{a^2 + b^2} x_2 \\ x'_2 = \dfrac{b}{a^2 + b^2} x_1 - \dfrac{a}{a^2 + b^2} x_2. \end{cases}$$

Nous en déduisons que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$, qui est le vecteur $x'_1\overrightarrow{v_1}$, a pour composante dans la base canonique

$$p_{\mathcal{D}}(x_1, x_2) = (\frac{a}{a^2 + b^2} x_1 + \frac{b}{a^2 + b^2} x_2)(a, b).$$

5.4. **Plans et droites affines dans $\mathbb{R}^3$.** Géométriquement un plan affine est un plan ne passant pas par O. Il est donc parallèle à un plan vectoriel. L'équation cartésienne d'un plan affine est du type

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Si $d \neq 0$, ce plan ne passe pas par O et donc n'est pas vectoriel. Ce plan est parallèle au plan vectoriel $\mathcal{P}_0$ d'équation

$$ax + by + cz = 0.$$

Nous avons vu comment trouver une base $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\}$ de ce plan vectoriel. Si A est un point de $\mathcal{P}$, tout point M de $\mathcal{P}$ vérifie

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{V_1} + t_2\overrightarrow{V_2}.$$

Ceci nous donne les équations paramétriques du plan affine.

Pour déterminer soit l'équation cartésienne, soit les équations paramétriques, nous pouvons

(1) Soit donner trois points A, B, C de ce plan. On détermine l'équation cartésienne en écrivant que chacun de ces points vérifie l'équation cartésienne et résoudre le système linéaire qui s'en déduit.

Exemple. Trouver l'équation cartésienne du plan affine passant par les points $A = (1, 1, 0), B = (0, 1, 1), C = (-1, 0, 2)$. Soit

$$ax + by + cz + d = 0$$

une équation cartésienne. Comme A, B, C sont dans ce plan, nous avons

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ -a + 2c + d = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. La première équation donne $a = -b - d$, la deuxième $c = -b - d$ d'où $a = c$ et $c = -d$. D'où $a = c = -d, b = 0$ et une équation du plan est $ax + az - a = 0$ et en divisant par a, une équation cartésienne est

$$x + z - 1 = 0.$$

(2) Soit en donnant un repère $(A, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ et en écrivant que tout point M de ce plan est tel que

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{V_1} + t_2\overrightarrow{V_2}.$$

Le passage d'une présentation à l'autre se fait comme dans le cas vectoriel. Par exemple, comme nous l'avons vu dans le cas des plans vectoriels, nous pouvons trouver une équation catésienne en écrivant que la famille des trois vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ est liée ce qui est équivalent à dire que le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs est nul. On a $\overrightarrow{AM} = x-1, y, z+1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 2)$. Cette matrice, dans cet exemple, est donc

$$M = \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y & 0 & -1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple. Trouver les équations paramétriques du plan affine passant par les points $A = (1, 1, 0), B = (0, 1, 1), C = (-1, 0, 2)$. Soit $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{V_1} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{V_2} = (-2, -1, 2).$$

L'équation vectorielle $\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{V_1} + t_2\overrightarrow{V_2}$ donne

$$(x-1, y-1, z) = t_1(-1, 0, 1) + t_2(-2, -1, 2)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = 1 - t_1 - 2t_2, \\ y = 1 - t_2, \\ z = t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

Géométriquement une droite affine dans $\mathbb{R}^3$ est une droite ne passant pas par O. Elle est parallèle, c'est-à-dire coplanaire et sans point d'intersection, à une droite vectorielle. Elle peut être définie

(1) Soit par un système d'équations catésiennes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

représentant l'intersection de deux plans affines. Le premier plan a pour vecteur directeur (qui est orthogonal au plan) le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et le deuxième plan a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Le système d'équations définit bien une droite si et seulement si ces deux vecteurs sont linéairement indépendants ce qui est équivalent à

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}.$$

La droite vectorielle parallèle à cette droite affine a donc comme équations cartésiennes :'

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

(2) Soit par un système d'équations paramétriques. Un tel système est défini par la donnée d'un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de la droite (qui est porté par la droite), par un point A sur cette droite et par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{v}.$$

Notons, par exemple, que si la droite est définie par le système de coordonnées cartésiennes, alors nous pouvons choisir pour vecteur directeur de la droite le vecteur

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}.$$

6. Comment calculer le déterminant en utilisant le langage PYTHON.

Rappelons que PYTHON est un langage de programmation (gratuit) très souvent étudié au lycée pour s'initier à la programmation. On suppose donc les rudiments connus. Plaçons nous dans l'éditeur IDLE fournit avec le logiciel PYTHON. Tout d'abord il faut appeler le module NUMPY qui est une librairie permettant de faire du calcul matriciel (nous verrons cela plus tard) et en utilisant la fonction "det" de calculer le déterminant de la matrice. Voici comment écrire en premier lieu la matrice carrée 3 lignes et 3 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

```
> > > import numpy as np
> > > x = np.array([1, 2, 3], [3, 4, 5], [5, 6,7])
```

```
> > > x
array([1, 2, 3],[3, 4, 5], [5, 6,7])
```

Pour calculer le déterminant, on rajoute la commande

```
> > > np.linalg.det(a)
```

Voici un exemple :

```
> > >a = np.array(([-2,2,-3],[-1,1,3],[2,0,-1]))
> > > a
array([[-2, 2, -3], [-1, 1, 3],[ 2, 0, -1]])
> > > np.linalg.det(a)
17.999999999999996
```

Je laisse aux lecteurs le plaisir d'avoir un résultat en entier.

On peut également calculer le produit scalaire et vectoriel de vecteur dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas les vecteurs sont considérés comme des matrices d'une seule ligne. Pour calculer le produit scalaire on utile la fonction **vdot** et pour le produit vectoriel la fonction **cross**. Voici un exemple :

```
> > >u = np.array([-2,2,-3])
> > > v = np.array([1,1,2])
> > > np.vdot(u , v)
-6
```

medskip

```
> > >u = np.array([-2,2,-3])
> > > v = np.array([1,1,2])
> > > np.cross(u , v)
array([7, -1, -4])
```