FST Mulhouse. Université de Haute Alsace

Licence 1 Physique-Chimie

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 2

Espaces vectoriels . Sous-espaces vectoriels

Table des matières

Dans tout ce chapitre et les suivants, nous désignerons par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou celui $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Définition d'un espace vectoriel

Nous allons dans ce chapitre généraliser ce que nous avons vu au chapitre précédent, concernant la structure des vecteurs dans l'espace et ses deux opérations qu'étaient l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire, à des ensembles quelconques dont les éléments seront appelés vecteurs et sur lesquels nous définirons une addition et une multiplication par un scalaire.

1.1. **Définition d'un espace vectoriel sur un corps.** Soit E un ensemble dont les éléments, qui seront appelés "vecteurs", seront notés par une majuscule fléchée, comme $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ ou même indexée, $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}$. Les éléments de $\mathbb{K}$, appelés "scalaires" seront notés par une minuscule latine ou grecque, x,y,α qui peuvent être indexées x_1,x_2,α_3.

Définition 1. *On dit que l'ensemble non vide E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il possède les propriétés suivantes*

(1) *Il est muni d'une première opération* **interne**, *appelée addition, qui associe à deux éléments quelconques $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ de E un troisième élément noté $\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}$, cette opération possédant les propriétés suivantes :*
   (a) *Elle est associative* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in E, \quad (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) + \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}),$
   (b) *Elle est commutative :* $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{X},$
   (c) *Il existe un élément neutre $\overrightarrow{0} \in E$, appelé vecteur nul :* $\forall \overrightarrow{X} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{X},$
   (d) *Tout élément $\overrightarrow{X}$ de E possède un symétrique $(\overrightarrow{-X}) \in E$ par rapport à $\overrightarrow{0}$:*
$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{K}, \exists (\overrightarrow{-X}) \in E, \quad \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{-X}) = \overrightarrow{0}.$$

(2) *Il est muni d'une deuxième opération* **externe**, *appelée la multiplication par un scalaire ou multiplication externe, qui à un élément $\overrightarrow{X}$ de E et un scalaire α de $\mathbb{K}$ fait correspondre un vecteur noté $\alpha\overrightarrow{X}$ de E, cette opération vérifiant les propriétés suivantes*
   (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ \alpha(\beta\overrightarrow{X}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{X},$
   (b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X} \in E,\ (\alpha + \beta)\overrightarrow{X} = \alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{X},$
   (c) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E,\ \alpha(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = \alpha\overrightarrow{X} + \alpha\overrightarrow{Y},$
   (d) $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}.$

Notez que nous ne parlons pas (encore) de multiplication de vecteurs. Ceci viendra plus tard. Comme conséquences directes de cette définition, on montre (ceci se fera sous forme d'exercices) les propriétés suivantes :

(1) $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ 0\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0},$.
(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0},$
(3) $\alpha\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
(4) $\forall \overrightarrow{X} \in E, -\overrightarrow{X} = -1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{-X}$.

Toutes les propriétés présentées dans la définition ci-dessus permettent de simplifier des expressions linéaires entre vecteurs de E. Par exemple
$$3(2\overrightarrow{X} - 4\overrightarrow{Y}) + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 6\overrightarrow{X} - 12\overrightarrow{Y} + 5\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = 11\overrightarrow{X} - 11\overrightarrow{Y} = 11(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}).$$

1.2. **Exemples d'espaces vectoriels.** Les exemples ci-dessous ne sont pas démontrés. On se reportera au cours de première année et il est suggéré de refaire toutes les démonstrations.

(1) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Effet, si $x, y \in \mathbb{R}$, alors l'addition $x + y$ vérifie bien les axiomes (a),(b),(c) et (d) de l'addition donnés dans la Définition 1. La multiplication externe est donné par la multiplication de $\mathbb{R}$: soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ici $\mathbb{R}$ joue le rôle de $\mathbb{K}$ et soit $x \in \mathbb{R}$, ici $\mathbb{R}$ joue le rôle de E, alors αx correspond au produit classique de réels et cette opération vérifie les axiomes (a),(b),(c) et (d) de la multiplication par un scalaire donnés dans la Définition 1.

(2) $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En effet l'addition correspond à l'addition des nombres complexes. La multiplication externe par un scalaire de $\mathbb{R}$ est défini naturellement par

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x + iy \in \mathbb{C},\ \text{alors}\ \ \alpha(x + iy) = \alpha x + i\alpha y$$

et cette multiplication externe est bien définie.

Remarque importante. Nous avons construit dans ces deux exemples ci-dessus deux espaces vectoriels :

(a) l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, ici les scalaires sont complexes,

(b) l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, ici les scalaires sont réels.

Ces deux espaces vectoriels, bien qu'ayant le même ensemble sous-jacent à savoir l'ensemble $\mathbb{C}$, sont totalement différents en tant qu'espaces vectoriels. Dans le deuxième, on ne s'autorise pas la multiplication d'un complexe par un autre complexe mais seulement la multiplication d'un complexe par un scalaire réel. On notera également que $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ car la multiplication externe n'est pas définie. En effet si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}$, alors $\alpha = a + ib$ et $\overrightarrow{X} = x$ et $\alpha\overrightarrow{X} = (a + ib)x = ax + ibx$ et ceci n'appartient pas toujours à $\mathbb{R}$. Par exemple $\alpha = i$ et $\overrightarrow{X} = 2$, alors $\alpha\overrightarrow{X} = 2i \notin \mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels. Cet espace vectoriel est assez délicat à étudier. Il est à la base de la théorie des nombres, de la théorie de Galois théorie qui s'intéresse à l'existence ou pas de formules donnat les racines d'une équation polynomiale de degré quelconque. Il est totalement différent, comme espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}$.

(4) L'ensemble des vecteurs de l'espace comme décrit dans le chapitre précédent et cet exemple sert en quelque sorte de modèle d'espace vectoriel réel.

(5) Soit n un entier positif non nul et $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\}$ l'ensemble des n-uples de nombres réels. Alors $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux opérations suivantes :

(a) $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$,

(b) $\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

On vérifie sans peine que toutes les propriétés de la définition sont vérifiées.

(6) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'addition est définie par

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

et la multiplication par un scalaire par

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)).$$

L'ensemble des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour l'ensemble des fonctions dérivables.

2. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné

2.1. Définition et exemples.

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit F une partie* **non vide** *de E.*

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

(1) La somme $\overrightarrow{X}+\overrightarrow{Y}$ de deux vecteurs de F est encore dans F,

(2) Le produit $\alpha\overrightarrow{X}$ de $\alpha \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ est encore dans F.

Ces deux conditions peuvent se résumer en une seule :

Proposition 1. *Une partie non vide F est un sous-espace vectoriel de E si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in F$, alors*

$$\alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{Y} \in F.$$

On vérifie sans peine que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de E alors

$$\overrightarrow{0} \in F.$$

Cette remarque est très utile pour montrer que ensemble donné est muni d'une structure d'espace vectoriel, il suffit de voir qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu et pour montrer qu'il est non vide, on montre qu'il contient le vecteur nul.

Exemples.

(1) Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors E et $\{\overrightarrow{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. On dira que sous-espace vectoriel de E est un sous-espace **propre** s'il est distinct de E lui même et de $\{\vec{0}\}$.

(2) Considérons l'espace ordinaire et son origine O comme nous l'avons défini au chapitre précédent. Nous avons vu que c'est un espace vectoriel réel. Toute droite passant par 0 et tout plan passant par O sont des sous-espaces vectoriels. Ce sont les seuls sous-espaces vectoriels propres

(3) Regardons sur un exemple ce qui vient d'être dit. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation

$$2x - y + 3z = 0.$$

Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\mathcal{P}$ est non vide, le vecteur nul $(0,0,0)$ vérifie bien $2 \times 0 - 0 + 3 \times 0 = 0$.

(b) Soient $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux points de $\mathcal{P}$. Montrons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ le point $aM_1 + bM_2 = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2)$ appartient aussi à $\mathcal{P}$. Par hypothèse $M_1 \in \mathcal{P}$, c'est-à-dire

$$2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0.$$

De même, on a

$$2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0.$$

Le point $aM_1 + bM_2$ est aussi dans $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$2(ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) + 3(az_1 + bz_2) = 0.$$

Or

$$2(ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) + 3(az_1 + bz_2) = a(2x_1 - y_1 + 3z_1) + b(x_2 - y_2 + 3z_2) = 0.$$

Ainsi $aM_1 + bM_2 \in \mathcal{P}$.

(4) Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions d'une variable réelle définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous avons vu que cet ensemble était muni d'une structure d'espace vectoriel pour l'addition des fonctions :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

et la multiplication externe

$$(af_1)(x) = af_1(x).$$

Considérons le sous-ensemble $\mathcal{F}_0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. En effet

(a) La fonction nulle : $0(x) = 0$ est continue sur I,

(b) Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Comme la somme de fonctions continues est encore une fonction continue, alors $f_1 + f_1 \in \mathcal{F}_0(I, \mathbb{R})$.

(c) De même, si $a \in \mathbb{R}$ et f_1 continue, alors la fonction af_1 est aussi continue.

On en déduit que $\mathcal{F}_0(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

(5) On montre de la même façon que le sous-ensemble $\mathcal{F}_1(I, \mathbb{R})$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ formé des fonctions dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Notons également que le théorème, toute fonction dérivable sur I est continue sur I est équivalent à dire que $\mathcal{F}_1(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_0(I, \mathbb{R})$.

2.2. **Intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E.** La propriété suivante concernant des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné est très utile dans l'étude géométrique des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Montrons qur $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

(1) $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. En effet comme F_1 et F_2 sont des sous-espaces de E, ils contiennent tous les deux le vecteur nul.

(2) Soient $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ deux vecteurs de $F_1 \cap F_2$ et soient $a, b \in \mathbb{K}$. Montrons que

$$a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y} \in F_1 \cap F_2.$$

Par hypothèse $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont dans F_1. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E, $a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y} \in F_1$. De même $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont dans F_2. Comme F_2 est un sous-espace vectoriel de E, $a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y} \in F_2$. Ainsi $a\overrightarrow{X} + b\overrightarrow{Y} \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. Il n'en est rien concernant la réunion de sous-espaces. En général si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, alors la réunion $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et considérons

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}, \ F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x-y=0\}.$$

Soient $\overrightarrow{X} = (1,-1)$ et $\overrightarrow{Y} = (2,2)$. Ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont bien dans la réunion $F_1 \cup F_2$ car $\overrightarrow{X} \in F_1$ et $\overrightarrow{Y} \in F_2$. Mais

$$\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = (1,-1) + (2,2) = (3,1)$$

et ce vecteur n'est ni dans F_1 ni dans F_2 et donc n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$. Cette réunion n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie A de E

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

3.1. Combinaison linéaire.

Définition 3. *Etant donnés une famille finie de vecteurs de E, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}$, on appelle combinaison linéaire de ces vecteurs, tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de E qui s'écrit*

$$\overrightarrow{V} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{v_p}$$

avec $a_1, a_2, \cdots, a_p \in \mathbb{K}$

On écrira aussi de façon abrégée

$$\overrightarrow{V} = \sum_{i=0}^{i=p} a_i \overrightarrow{v_i}.$$

La combinaison linéaire est donc en quelque sorte l'opération de base dans un espace vectoriel.

Définition 4. *Soit A un partie de E. On appelle combinaison linéaire des éléments de A toute combinaison linéaire*

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{v_p}$$

où $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p} \in A$ et $a_1, a_2, \cdots, a_p \in \mathbb{K}$.

Notons bien ici que l'on ne considère que des combinaisons linéaires de nombre fini de vecteurs de A même si A contient une infinité de vecteurs (par exemple une droite dans un plan vectoriel).

La proposition suivante découle directement des définitions :

Proposition 3. *Une partie non vide A de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si toute combinaison linéaire de vecteurs de A appartient à A.*

3.2. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A de E.

Théorème 1. *Soit A une partie non vide de E. Parmi tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, il y en a un plus petit qui est donné par l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'ensemble F des combinaisons linéaires de vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E.

(1) Comme A est non vide, on peut considérer un vecteur $\overrightarrow{v} \in A$. Soit la combinaison linéaire $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}$. Elle est dans F par définition de F. Comme elle donne le vecteur nu, on a bien $\overrightarrow{0} \in F$.

(2) Considérons deux éléments de F :

$$\overrightarrow{V} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{v_p},\ \overrightarrow{W} = b_1\overrightarrow{w_1} + b_2\overrightarrow{w_2} + \cdots + b_q\overrightarrow{w_q}$$

avec $\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_1}, \cdots, \overrightarrow{w_q} \in A$ et $a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q \in \mathbb{K}$. Alors

$$\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_p\overrightarrow{v_p} + b_1\overrightarrow{w_1} + b_2\overrightarrow{w_2} + \cdots + b_q\overrightarrow{w_q}$$

qui est bien une combinaison linéaire d'éléments de A et donc ce vecteur est dans F et F est un sous-espace vectoriel de E.

Si maintenant F' est un autre sous-espace vectoriel de E contenant A, il contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de A et donc il contient bien F. Nous dirons que F est le sous-espace vectoriel engendré par A. Un cas qui nous intéressera particulièrement est celui où A est une partie finie.

Exemple.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^3$ at A la partie de E constituée du seul vecteur $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. L'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des vecteurs du type $\overrightarrow{V} = a\overrightarrow{v}$ et donc

$$F = \{(a,a,a),\ a \in \mathbb{R}\}.$$

On trouve une droite vectorielle de vecteur directeur $(1,1,1)$.

(2) Soit $E = \mathbb{R}^3$ at A la partie de E constituée des vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1), \overrightarrow{v_2} = (1,0,2)$. Le sous-espace vectoriel F engendré par ces deux vecteurs est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\overrightarrow{V} = a(1,1,1) + b(1,0,2) = (a+b, a, a+2b).$$

On trouve ici un plan vectoriel de base $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$.

(3) On prendra garde au fait que deux vecteurs n'engendrent pas nécessairement un plan. Par exemple $\overrightarrow{w_1} = (1,1,1)$ et $\overrightarrow{w_2} = (3,3,3)$ n'engendrent qu'une droite vectorielle.

4. Somme et somme directe de deux sous-espaces vectoriels

4.1. **Somme de deux sous-espaces vectoriels.** Nous avons vu que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Nous pouvons nous intéresser au plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient cette réunion et qui peut être E lui même, c'est-à-dire au sous-espace vectoriel engendré par la réunion de ces deux sous-espaces. Nous sommes alors conduit à la définition suivante

Définition 5. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la somme $F_1 + F_2$ de ces deux sous-espaces est le sous-espace vectoriel engendré par la partie $A = F_1 \cup F_2$. Il est donné par*

$$F_1 + F_2 = \{\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2},\ \overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2\}$$

.

Démonstration. Montrons que $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E. L'ensemble $F_1 + F_2$ est un sous-ensemble de E qui est non vide puisque $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ est un élément de $F_1 + F_2$. Soient $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in F_1 + F_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z} \in F_1 + F_2$. Par définition de $F_1 + F_2$ il existe des vecteurs $\overrightarrow{X_1} \in F_1$, $\overrightarrow{X_2} \in F_2$ tels que $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$. De même, il existe $\overrightarrow{U_1} \in F_1, \overrightarrow{U_2} \in F_2$ tels que $\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z} &= \alpha_1(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) + \alpha_2(\overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}) \\ &= (\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{U_1}) + (\alpha_2\overrightarrow{X_2} + \alpha_2\overrightarrow{U_2}). \end{aligned}$$

Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E, alors $\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{U_1} \in F_1$. De même $\alpha_2\overrightarrow{X_2} + \alpha_2\overrightarrow{U_2} \in F_2$. Ainsi $\alpha_1\overrightarrow{Y} + \alpha_2\overrightarrow{Z}$ se présente comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Ainsi $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme il contient F_1 et F_2, il contient le sous-ensemble $F_1 \cup F_2$. Manifestement, c'est le plus petit contenant cet ensemble puisque un espace vectoriel est stable par somme donc doit contenir les éléments $\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in F_1 \cup F_2$ donc en particulier contenir les éléments du type $\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z}$ avec $\overrightarrow{Y} \in F_1$, $\overrightarrow{Z} \in F_2$.

4.2. **Sous-espaces supplémentaires.** Supposons de plus que les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 vérifient

$$F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}.$$

. Sous cette nouvelle hypothèse on écrira la somme de ces deux sous-espaces $F_1 \oplus F_2$. Tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Mais cette décomposition n'est pas en général unique (quand on n'a pas d'hypothèse sur l'intersection $F_1 \cap F_2$). Toutefois, on montre aisément qu'avec l'hypothèse $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, tout vecteur de $F_1 \oplus F_2$ s'écrit de **manière unique** comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Si de plus nous avons

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

nous dirons dans ce cas que les sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires.

Exemple. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces vectoriels

(1) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
(2) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0, x + y - 2z = 0\}/$

Calculons $F_1 \cap F_2$. Soit $\overrightarrow{X} = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2$. Ses composantes vérifient donc le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. Eliminons x dans la deuxième et troisième équation. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} L1 & : & x + y + z = 0 \\ L2 - L1 & : & -3y = 0 \\ L3 - L1 & : & -3z = 0 \end{cases}$$

On en déduit $y = 0, z = 0$ et $x = -y - z = 0$. Ainsi $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ et donc $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$. Montrons que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. Notons que si $\overrightarrow{X_1} = (a,b,c) \in F_1$, alors $c = -a-b$ et donc $\overrightarrow{X_1} = (a,b,-a-b)$. Soit $\overrightarrow{X_2} = (u,v,w) \in F_2$. Ses composantes vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} u - 2v + w = 0 \\ u + v - 2w = 0 \end{array} \right.$$

Ansi $w = -u+2v$ et en reportant dans la deuxième équation $u+v-2(-u+2v) = 3u-3v = 0$ soit $u = v$ et donc $w = -u+2v = u$. Ainsi $\overrightarrow{X_2} = (u,v,w) = (u,u,u)$. Alors $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$ est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a + u \\ y = b + u \\ z = a - b + u \end{array} \right.$$

Il suffit de montrer que l'on peut déterminer les trois paramètres a,b,u en fonction de x,y,z. La première équation donne $u = x-a$. La deuxième se ramène alors à $y = b+x-a$ soit $b = -x+y+a$. Enfin la troisième équation donne $z = a-b+u = a-(-x+y+a)+(x-a) = -a+2x-y$ soit $a = 2x-y-z$. On en déduit $b = -x+y+a = -x+y+2x-y-z = x-z$ et $u = x-a = x-(2x-y-z) = -x+y+z$. En résumé

$$\overrightarrow{X_1} = (a,b,a-b) = (2x-y-z, x-z, x-y)$$
$$\overrightarrow{X_2} = (u,u,u) = (-x+y+z, -x+y+z, -x+y+z)$$

et on a

$$\overrightarrow{X} = (2x-y-z, x-z, x-y) + (-x+y+z, -x+y+z, -x+y+z) = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}.$$

Ainsi $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$ et comme $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$, on peut écrire

$$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$$

et les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires.