UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2. Mathématiques

ALGEBRE LINEAIRE

Cours Elisabeth Remm

EXERCICES - Chapitre 10

Applications de la diagonalisation

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Diagonaliser la matrice A.

(2) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Peut-on diagonaliser la matrice A.

(2) On pose $B = A - Id$. Calculer B^n pour $n \geq 2$

(3) En déduire l'expression de A^n.

Exercice 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^p et montrer que l'on a

$$A^p = a_p A + b_p I_3$$

a_p et b_p étant des constantes que l'on déterminera.

Exercice 5. Etudier la suite récurrente linéaire

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}.$$

Trouver la solution correspondant à $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Exercice 6. Etudier les suites récurrentes (u_n) et (v_n) définies par les relations

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = cu_{n-1} + dvn - 1 \end{cases}$$

les termes initiaux u_0 et v_0 étant donnés. Etudier le cas particulier $a = d$, $b = -c$.

Exercice 7. Soit A une matrice diagonalisable.

(1) Montrer que A et $\exp A$ sont des matrices qui commutent.

(2) Calculer $\det(\exp A)$.

Exercice 8. Calculer $\exp A$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Intégrer le système différentiel.

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = 2x + 4y + z \end{cases}$$

Ecrire la solution qui pour $t = 0$ vaut $(1, 1, 1)$.

Exercice 10. Intégrer le système différentiel.

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y + 2z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$$

Ecrire la solution qui pour $t = 1$ vaut $(1, 1, 1)$.

Exercice 11. Intégrer le système différentiel.

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = x + 2y + e^{2t} \end{cases}$$