UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Mathématiques

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 10

Quelques applications de la diagonalisation

Table des matières

1. Puissances d'une matrice diagonalisable

1.1. **Puissance d'une matrice semblable.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice M' est semblable à M s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

Proposition 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $M' = P^{-1}MP$ une matrice semblable. On a alors*

$$M'^k = P^{-1}M^kP$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. On a par exemple

$$M'^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$$

car $PP^{-1} = I_n$. Mais pour démontrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $M'^k = P^{-1}M^kP$ il faut faire une démonstration par récurrence.

Soit la propriété $\mathcal{P}_k : \{M'^k = P^{-1}M^kP\}$.

Initialisation : pour $k = 1$ on a bien $M'^1 = P^{-1}M^1P$ donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Héérédité : Supposons que pour un entier donné $k \geq 1$ on ait $M'^k = P^{-1}M^kP$. Alors

$$M'^{k+1} = M'M'^k = P^{-1}MPP^{-1}M^kP = P^{-1}MM^kP = P^{-1}M^{k+1}P.$$

L'identité est encore vraie à l'ordre $k+1$. Ainsi, si pour $k \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie alors la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est encore vraie.

Conclusion : pour tout $k \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie et on a donc pour tout $k \geq 1$, $M'^k = P^{-1}M^kP$.

Remarquons que $\mathcal{P}_0$ est également vraie puisque $(M')^0 = Id = PIdP^{-1} = PM^0P^{-1}$.

1.2. **Puissance d'une matrice diagonale.** Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale. On a alors, pour tout entier k

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ceci se démontre aussi par récurrence sur k.

1.3. **Puissance d'une matrice diagonalisable.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D semblable à M :

$$D = P^{-1}MP.$$

On en déduit

$$M = PDP^{-1}$$

et donc

$$M^k = PD^kP^{-1}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Ainsi le calcul de toute puissance de M est assez aisé dès que cette matrice est diagonalisable et que la diagonalisation n'est pas trop compliquée.

2. Suites récurrentes linéaires

2.1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est une suite récurrente linéraire si elle vérifie une relation de récurrence du type suivant

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \tag{1}$$

pour tout $n \geq 0$, où α et β sont des nombres réels donnés.

Le problème qui nous intéresse est celui de déterminer, lorsque α et β sont donnés, toutes les suites récurrentes linéaires vérifiant la relation (1) ci-dessus.

Proposition 2. *L'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* 2.

Démonstration. Il est clair que la suite nulle $u_n = 0$ pour tout n est une suite vérifiant (1). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant (1). On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \\ v_{n+2} = \alpha v_{n+1} + \beta v_n \end{array} \right.$$

et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la suite de terme général $au_n + bv_n$. Elle vérifie

$$au_{n+2} + bv_{n+2} = a(\alpha u_{n+1} + \beta u_n) + b(\alpha v_{n+1} + \beta v_n) = \alpha(au_{n+1} + bv_{n+1}) + \beta(au_n + bv_n).$$

Ainsi la suite $(au_n + bv_n)_{n\geq 0}$ vérifie aussi (1). On en déduit que l'ensemble des solutions est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cherchons sa dimension. Remarquons, dans un premier temps, que toute suite (u_n) vérifiant (1) est entièrement déterminée dès que u_0 et u_1 sont données. En effet, ceci permet de calculer u_2, puis avec u_1 et u_2 on calculer u_3, etc. Considérons alors l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to E$$

où E désigne l'espace vectoriel des solutions de (1), définie par $\varphi(a, b)$ est la suite réelle de E définie par $u_0 = a$ et $u_1 = b$. Cette application est linéaire surjective. Elle est injective car son noyau correspond aux couples (a, b) donnant la solution nulle. Or si (u_n) est la suite nulle, alors $u_0 = u_1 = 0$ et donc $a = b = 0$. Ainsi φ est un isomorphisme linéaire. On en déduit que E est de dimension 2.

2.2. **Etude matricielle.** Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que pour trouver les solutions d'une suite récurrente, il suffisait de trouver deux solutions particulières indépendantes. Nous allons proposer ici une étude matricielle.

La suite récurrente vérifie

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}.$$

Considérons la suite (v_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$v_n = u_{n-1}.$$

On obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = u_n. \end{array} \right.$$

que nous pouvons écrire matriciellement sous la forme

$$U_{n+1} = MU_n$$

où M est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et

$$U_{n+1} = M^n U_1.$$

On est donc conduit à calculer M^n ce que nous savons faire, d'après le paragraphe précédent, si M est diagonalisable.

3. Exponentielle d'une matrice diagonalisable

3.1. Définition de l'exponentielle d'une matrice carrée.

Définition 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle Exponentielle de la matrice M la somme de la série de puissances de M :*

$$\exp M = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots + \frac{1}{p!}M^p + \cdots \tag{2}$$

Cette définition a bien un sens car la série (2) est convergente, autrement dit si $\alpha_{ij}^{(k)}$ désigne les éléments de la matrice somme partielle :

$$S_k = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots + \frac{1}{k!}M^k,$$

les suites $(\alpha_{ij}^{(k)})_{k\geq 0}$ (i et j étant fixes et k tend vers l'infini) sont convergentes. En effet soit β tels que

$$|\beta| \geq \alpha_{ij},\ \forall i, j.$$

Alors

$$|\alpha_{ij}^{(k)}| \leq 1 + n\beta + \frac{1}{2!}n^2\beta^2 + \cdots + \frac{1}{k!}n^k\beta^k \leq e^{n\beta}.$$

On en déduit que $\exp M$ existe quelle que soit la matrice carrée M.

Exemples

(1) Soit 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp 0_n = I_n.$$

(2) Soit I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp I_n = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e \end{pmatrix}$$

Théorème 1. *(1) Soient $M_2, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient $M_1 M_2 = M_2 M_1$. Alors*

$$\exp(M_1 + M_2) = \exp M_1 \exp M_2.$$

(2) Soit $P \in GL(n, \mathbb{K})$ une matrice inversible d'ordre n. Alors

$$\exp(P^{-1} M P) = P^{-1} (\exp M) P.$$

Démonstration. 1. Le terme général de la série $\exp(M_1 + M_2)$ est $\dfrac{1}{k!}(M_1 + M_2)^k$. Avant de développer $(M_1 + M_2)^p$, notons qu'en général la formule du binôme ne s'applique pas au calcul matriciel. En effet, considérons le cas $p = 2$. On a

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)^2 &= (M_1 + M_2)(M_1 + M_2) \\ &= M_1^2 + M_1 M_2 + M_2 M_1 + M_2^2 \end{aligned}$$

et cette expression n'est simplifiable que si $M_1 M_2 = M_2 M_1$ et l'on comprend ici l'importance de l'hypothèse : les matrices M_1 et M_2 commutent. Sous cette hypothèse, on a alors :

$$\begin{aligned} (M_1 + M_2)^2 &= M_1^2 + M_1 M_2 + M_2 M_1 + M_2^2 \\ &= M_1^2 + 2 M_1 M_2 + M_2^2 \end{aligned}$$

et la formule du binôme est donc valable dans ce cas. On montre donc, par récurrence sur k que, sous l'hypothèse $M_1 M_2 = M_2 M_1$ on a :

$$(M_1 + M_2)^k = M_1^k + k M_1^{k-1} M_2 + \cdots + \frac{k!}{i!(k-i)!} M_1^{k-i} M_2^i + \cdots + M_2^k.$$

Considérons à présent le produit $\exp M_1 \exp M_2$. Calculons la partie homogène de degré k. Elle est égale à :

$$\frac{1}{k!} M_1^k + \frac{1}{(k-1)!} M_1^{k-1} M_2 + \cdots + \frac{1}{(k-i)!} M_1^{k-i} \frac{1}{i!} M_2^i + \cdots + \frac{1}{k!} M_2^k.$$

Or cette expression s'écrit aussi :

$$\frac{1}{k!} \left(M_1^k + \frac{k!}{(k-1)!} M_1^{k-1} M_2 + \cdots + \frac{k!}{(k-i)! i!} M_1^{k-i} M_2^i + \cdots + M_2^k \right)$$

soit

$$\frac{1}{k!} (M_1 + M_2)^k.$$

On en déduit donc que

$$\exp M_1 \exp M_2 = \exp(M_1 + M_2).$$

2. Si $M_2 = P^{-1} M_1 P$, alors, pour tout entier k on a

$$M_2^k = P^{-1} M_1^k P.$$

Considérons la somme partielle $S_k = I_n + M_2 + \cdots \frac{1}{k!}M_2^k$ de la série $\exp M_2$. On a alors

$$\begin{aligned}
S_k &= I_n + M_2 + \cdots \frac{1}{k!}M_2^k \\
&= I_n + P^{-1}M_1P + \cdots \frac{1}{k!}P^{-1}M_1^kP \\
&= P^{-1}I_nP + P^{-1}M_1P + \cdots \frac{1}{k!}P^{-1}M_1^kP \\
&= P^{-1}(I_n + M_1 + \cdots \frac{1}{k!}M_1^k)P \\
&= P^{-1}\mathcal{S}_kP
\end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_k$ est la somme partielle de la série $\exp M_1$. On en déduit donc, par passage à la limite, que

$$\exp M_2 = P^{-1}(\exp M)P.$$

Corollaire 1. *Quelle que soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $\exp M$ est inversible et*

$$(\exp M)^{-1} = \exp(-M).$$

Démonstration. En effet, il est évident que les matrices M et $-M$ commutent. On en déduit

$$\exp(M - M) = \exp(M)\exp(-M).$$

Or

$$\exp(M - M) = \exp 0 = I_n.$$

Ainsi

$$\exp(M)\exp(-M) = I_n$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

3.2. **Exponentielle d'une matrice diagonale.**

Proposition 3. *Soit D la matrice diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\exp D$ est la matrice diagonale

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En effet, nous avons vu que pour tout entier k, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

On en déduit que chacune des sommes partielles de la série $\exp D$ est une matrice diagonale et donc $\exp D$ est aussi diagonale. Calculons chacun des termes de sa diagonale. Le i-ème est

$$1 + \lambda_i + \frac{1}{2!}\lambda_i^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\lambda_i^p + \cdots$$

qui correspond au développement en série de e^{λ_i}. D'où le résultat.

3.3. **Exponentielle d'une matrice diagonalisable.**

Proposition 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et soit $D = P^{-1}MP$ une matrice diagonale semblable à M. Alors*

$$\exp M = P(\exp D)P^{-1}.$$

Démonstration. Soit

$$S_k = I_n + M + \cdots + \frac{1}{k!}M^k$$

la somme partielle de la série $\exp M$. Comme $D = P^{-1}MP$, on a $M = PDP^{-1}$ et donc

$$\Sigma_k = I_n + PDP^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k.$$

Or on a vu que

$$(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$

ce qui donne

$$S_k = I_n + PDP^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}PD^kP^{-1} = P(I_n + D + \cdots + \frac{1}{k!}D^k)P^{-1}.$$

On en déduit, par passage à la limite

$$\exp M = P(I_n + D + \cdots + \frac{1}{k!}D^k + \cdots)P^{-1} = P(\exp D)P^{-1}.$$

3.4. **La fonction** $\exp(tM)$**.** Fixons nous une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(tM)$$

C'est une fonction d'une variable réelle à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet espace est de dimension n^2 et peut donc être identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$.

Proposition 5. *La fonction*

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp tM.$$

de la variable réelle t est dérivable et a pour dérivée

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(tM)\right) = M \cdot \exp(tM).$$

Démonstration. $\exp tM$ est la somme de la série

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} t^p M^p.$$

Cette série est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais est sur chacune des composantes (d'une matrice carrée) une série entière réelle. Chacune de ces composantes est donc indéfiniment de fois dérivable. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\exp(tM)\right) &= M + tM^2 + \tfrac{1}{2}t^2M + \cdots + pt^{p-1}\tfrac{1}{p!}M^P + \cdots \\ &= M(I_n + tM + \tfrac{1}{2}t^2M^2 + \cdots + \tfrac{1}{(p-1)!}t^{p-1}M^{p-1} + \cdots) \\ &= M\exp(tM). \end{aligned}$$

4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

4.1. **Cas homogène.** Considérons n fonctions

$$x_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ indéfiniment de fois dérivables. On dit qu'elles satisfont un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants s'il existe une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right.$$

Pour faciliter l'écriture, nous allons considérer les fonctions $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ comme les composantes d'un vecteur colonne $X(t)$ relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$X(t) = \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{array} \right).$$

Si $X'(t)$ désigne le vecteur colonne dont les composantes sont les dérivées des fonctions $x_i(t)$:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \cdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

le système différentiel (3) s'écrit alors :

$$X'(t) = AX(t).$$

Une solution de (3) est une colonne de fonctions

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

telle que

$$F'(t) = AF(t).$$

Exemples.

(1) Si $n = 1$, le système (3) se réduit à la simple équation

$$x'(t) = ax(t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$. Toute solution de cette équation est de la forme

$$f(t) = Ce^{at}$$

avec $C \in \mathbb{R}$. En particulier, il existe une et une seule solution vérifiant la condition initiale $f(t_0) = \alpha$. Elle s'écrit

$$f(t) = e^{a(t-t_0)}\alpha.$$

(2) Considérons une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants et homogène :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Considérons les fonctions

$$x_1(t) = y'(t), \quad x_2(t) = y(t).$$

L'équation se ramène alors à

$$x'_1(t) + ax_1(t) + bx_2(t) = 0, \quad x'_2(t) = x_1(t)$$

que l'on peut écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} x'_1(t) = -ax_1(t) - bx_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Théorème 2. *Il existe une et une seule solution du système différentiel linéaire à coefficients constants et homogène (3) $X'(t) = AX(t)$ vérifiant la condition initiale*

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

. Elle s'écrit

$$F(t) = \exp(A(t - t_0))X_0.$$

Démonstration. Il est clair que $\exp(A(t-t_0))X_0$ est une solution de (3). Montrons que c'est l'unique solution. Soit $G(t)$ une solution de (3) telle que $G(t_0) = X_0$. On a

$$G(t) = \exp(A(t - t_0))G_1(t)$$

où $G_1(t)$ est le vecteur colonne $\exp(-A(t-t_0))G(t)$. Rappelons en effet que $\exp(A(t-t_0))$ est une matrice inversible dont l'inverse est $\exp(-A(t-t_0))$. On en déduit

$$G'(t) = A\exp(A(t - t_0))G_1(t) + \exp(A(t - t_0))G_1'(t).$$

Mais comme $G(t)$ est solution, elle vérifie $G'(t) = AG(t)$. Ainsi

$$A\exp A(t - t_0)G_1(t) = A\exp(A(t - t_0))G_1(t) + \exp(A(t - t_0))G_1'(t)$$

et donc

$$\exp(A(t - t_0))G_1'(t) = 0$$

Comme la matrice $\exp\left[A(t-t_0)\right]$ est inversible, on obtient

$$G_1'(t) = 0.$$

D'où $G_1(t) = G_1(t_0) = G(t_0) = X_0$. Ainsi

$$G(t) = \exp[A(t - t_0)]X_0.$$

Supposons que la matrice A du système (3) soit diagonalisable. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicité respective $r_1, \cdots, r_p$ (avec $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$). La solution générale de (3) est donnée par

$$F(t) = \exp(tA) \cdot C$$

où C est un vecteur colonne dont les composantes c_i sont des constantes appartenant à $\mathbb{R}$. Le calcul de $\exp tA$ se déduit, comme A et donc tA sont diagonalisables, du paragraphe précédent. Il s'en suit que chaque composantes $x_i(t)$ de la solution $F(t)$ est de la forme

$$x_i(t) = K_{i,1}e^{\lambda_1 t} + \cdots + K_{i,r}e^{\lambda_r t}$$

où $K_{i,1}, \cdots, K_{i,r}$ sont des constantes réeles, pour tout $i = 1, \cdots n$.

Remarque. Si la matrice A du système (3) n'est pas diagonalisable mais admet n valeurs propres distinctes ou confondues, alors en notant par $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicité respective $r_1, \cdots, r_p$ (avec $r_1+r_2+\cdots+r_p = n$) alors la solution générale de (3) est

$$X(t) = \sum_{i=1}^{p} C_i(t)e^{\lambda_i t}$$

la colonne $C_i(t)$ ayant pour éléments des polynômes en t de degré strictement inférieur à r_i. Nous verrons ceci dans le dernier chapitre.

Revenons au cas diagonalisable. Nous avons vu que la solution générale est

$$F(t) = \exp(tA) \cdot C$$

où C est un vecteur colonne constant quelconque. Si nous choisissons pour C le vecteur

$$C_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ c_j = 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nous obtenons une solution particulière que nous noterons $F_j(t)$. On en déduit que la solution générale est une combinaison linéaire des solutions $F_j(t)$. Ainsi l'ensemble des solutions est un espace vectoriel engendré par les solutions $F_j(t)$, $j = 1, \cdots, n$.

Remarque. Nous pouvons en fait montrer que ces solutions sont indépendantes. En effet on a, si $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale semblable à A choisie,

$$F(t) = P[\exp(tA)]P^{-1}C$$

comme P et $\exp(tA)$ sont inversibles les composantes de $F(t)$ sont indépendantes. Il s'en suit que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimensension n.

Soit $M(t)$ une matrice dont les vecteurs colonnes forment une base de cet espace. Une telle matrice est appelée une matrice fondamentale de solutions. On notera alors par $M(t, t_0)$ la matrice fondamentale qui pour $t = t_0$ prend la valeur $M(t_0) = I_n$.

4.2. **Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants. Cas non homogène.**

Définition 2. *On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants avec second membre tout système*

$$X'(t) = AX(t) + B(t), \tag{4}$$

où

$$X'(t) = AX(t) \tag{5}$$

est un système différentiel linéaire à coefficients constants homogène et $B(t)$ un vecteur colonne donné dont les composantes sont des fonctions indéfiniment dérivables de la variable t.

Le système homogène $X'(t) = AX(t)$ est appelé le système homogène associé à (4).

Théorème 3. *La solution générale du système différentiel à coefficients constants avec second membre (4) s'obtient en ajoutant à la solution générale du système homogène associé (5) une solution particulière de (4).*

La proposition suivante donne une méthode de trouver cette solution particulière.

Proposition 6. *Une solution particulière de (4) est de la forme*

$$X(t) = M(t)C(t)$$

où $M(t)$ est une matrice fondamentale de solution de (5) et où $C(t)$ est un vecteur colonne vérifiant

$$M(t)C'(t) = B(t).$$

Nous avons vu, lorsque A est diagonalisable, comment calculer $M(t)$. Cette matrice étant inversible, on a alors

$$C'(t) = M(t)^{-1}B(t)$$

et donc le vecteur $C(t)$ s'obtient par intégration.