FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES. UHA MULHOUSE

L2 Mathématiques.

Mathématiques: ALGEBRE LINEAIRE II

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 2

Quelques applications de la diagonalisation

1. Puissances d'une matrice diagonalisable

1.1. **Puissance d'une matrice semblable.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une matrice $M4$ est semblable à M s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

Proposition 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $M' = P^{-1}MP$ une matrice semblable. On a alors*

$$M'^p = M' = P^{-1}M^pP$$

pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En effet, démontrons par récurrence cette identité.

$$M'^2 = M' = P^{-1}MPP^{-1}MP = M' = P^{-1}M^2P$$

car $PP^{-1} = I_n$. Supposons que pour un entier donné p on ait $M'^p = M' = P^{-1}M^pP$. Alors

$$M'^{p+1} = M'M'^p = P^{-1}MPP^{-1}M^pP = P^{-1}MM^pP = P^{-1}M^{p+1}P.$$

L'identité est encore vraie à l'ordre $p+1$. Elle est donc vraie pour tout p.

1.2. **Puissance d'une matrice diagonale.** Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale. On a alors, pour tout entier p

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Ceci se démontre aussi par récurrence sur p.

1.3. **Puissance d'une matrice diagonalisable.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Il existe donc une matrice diagonale D semblable à M:

$$D = P^{-1}MP.$$

On en déduit

$$M = PDP^{-1}$$

et donc

$$M^p = PD^pP^{-1}$$

pour tout entier $p \in \mathbb{N}$. Ainsi le calcul de toute puissance de M est assez aisé dès que cette matrice est diagonalisable et que la diagonalisation ne soit pas trop compliquée.

2. Suites récurrentes linéaires

2.1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est une suite récurrente linéraire si elle vérifie une relation de récurrence du type suivant

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \tag{1}$$

pour tout $n \geq 0$, où α et β sont des nombres réels donnés.

Le problème qui nous intd́resse est celui de déterminer toutes les suites récurrentes linéires vérifiant, lorsque α et β sont donnés, la relation (1) ci-dessus.

Proposition 2. *L'ensemble des solutions de (1) est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* 2.

Démonstration. Il est clair que la suite nulle $u_n = 0$ pour tout n est une suite vérifiant (1). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant (1). On a donc

$$\begin{cases} u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \\ v_{n+2} = \alpha v_{n+1} + \beta v_n \end{cases}$$

et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la suite de terme génóral $au_n + bv_n$. Elle vérifie

$$au_{n+2} + bv_{n+2} = a(alphau_{n+1} + \beta u_n) + b(\alpha v_{n+1} + \beta v_n) = \alpha(au_{n+1} + bv_{n+1}) + \beta(au_n) + bv_n).$$

Ainsi la suite $(au_n + bv_n)_{n\geq 0})$ vérifie aussi (1). On en déduit que l'ensemble des solutions est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cherchons sa dimension. Remarquons, dans un premier temps, que toute suite $u_n)$ vérifiant (1) est entièrements déterminée dès que u_0 et u_1 sont données. En effet, ceci permet de calculer u_2, puis avec u_1 et u_2 on calculer u_3 etc. Considérons alors l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to E$$

où E désbigne l'espace vectoriel des solutions de (1), définie par $\varphi(a, b)$ est la suite réelle de E définie par $u_0 = a$ et $u_1 = b$. Cette application est linŕaire surjective. Elle est injective car son noyau correspond aux couples (a, b) donnant la solution nulle. Or si (u_n) est la suite nulle, alors $u_0 = u_1 = 0$ et donc $a = b = 0$. Ainsi φ est un isomorphisme linéaire. On en déduit que E est de dimension 2.

2.2. **Etude matricielle.** Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que pour trouver les solutions d'une suite récurrente, il suffisait de trouver deux solutions particulières indépendantes. Nous allons proposer ici une étude matricielle.

La suite récurrente vérifie

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}.$$

Considérons la suite (v_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$v_n = u_{n-1}.$$

On obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = u_n. \end{array} \right.$$

que nous pouvons écrire matriciellement sous la forme

$$U_{n+1} = MU_n$$

où M est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et

$$U_{n+1} = M^n U_1.$$

On est donc conduit à calculer M^n ce que nous savons faire, d'après le paragraphe précédent, si M est diagonalisable.

3. Exponentielle d'une matrice diagonalisable

3.1. Définition de l'exponentielle d'une matrice carrée.

Définition 1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle Exponentielle de la matrice M la somme de la série de puissances de M:*

$$\exp M = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots + \frac{1}{p!}M^p + \cdots \tag{2}$$

Cette définition a bien un sens car la série (2) est convergente, autrement dit si $\alpha_{ij}^{(p)}$ désigne les éléments de la matrice somme partielle:

$$S_p = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots + \frac{1}{p!}M^p,$$

les suites $(\alpha_{ij}^{(p)})_{p\geq 0}$ (i et j étant fixes et p tend vers l'infini) sont convergentes. En effet soit β tels que

$$|\beta| \geq \alpha_{ij}, \ \forall i, j.$$

Alors

$$|\alpha_{ij}^{(p)}| \leq 1 + n\beta + \frac{1}{2!}n2\beta^2 + \cdots + \frac{1}{p!}n^p\beta^p \leq e^{n\beta}.$$

On en déduit que $\exp M$ existe quelle que soit la matrice carrée M.

Exemples

(1) Soit 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp 0_n = I_n.$$

(2) Soit I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\exp I_n = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e \end{pmatrix}$$

Théorème 1. (1) *Soient $M_2, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient $M_1M_2 = M_2M_1$. Alors*

$$\exp(M_1 + M_2) = \exp M_1 \exp M_2.$$

(2) *Soit $P \in GL(n, \mathbb{K})$ une matrice inversible d'ordre n. Alors*

$$\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}(\exp M)P.$$

Démonstration. 1. Le terme général de la série $\exp(M_1 + M_2)$ est $\dfrac{1}{p!}(M_1 + M_2)^p$. Avant de développer $(M_1 + M_2)^p$, notons qu'en général la formule du binôme ne s'applique pas au calcul matriciel. En effet, considérons le cas $p = 2$. On a

$$\begin{aligned}(M_1 + M_2)^2 &= (M_1 + M_2)(M_1 + M_2)\\ &= M_1^2 + M_1M_2 + M_2M_1 + M_2^2\end{aligned}$$

et cette expression n'est simplifiable que si $M_1M_2 = M_2M_1$ et l'on comprend ici l'importance de l'hypothèse: les matrices M_1 et M_2 commutent. Sous cette hypothèse, on a alors:

$$\begin{aligned}(M_1 + M_2)^2 &= M_1^2 + M_1M_2 + M_2M_1 + M_2^2\\ &= M_1^2 + 2M_1M_2 + M_2^2\end{aligned}$$

et la formule du binôme est donc valable dans ce cas. On montre donc, par récurrence sur p que, sous l'hypothèse $M_1M_2 = M_2M_1$ on a:

$$(M_1 + M_2)^p = M_1^p + pM_1^{p-1}M_2 + \cdots + \frac{p!}{k!(p-k)!}M_1^{p-k}M_2^k + \cdots + M_2^p.$$

Considérons à présent le produit $\exp M_1 \exp M_2$. Calculons la partie homogène de degré p. Elle est égale à:

$$\frac{1}{p!}M_1^p + \frac{1}{(p-1)!}M_1^{p-1}M_2 + \cdots + \frac{1}{(p-k)!}M_1^{p-k}\frac{1}{k!}M_2^k + \cdots + \frac{1}{p!}M_2^p.$$

Or cette expression s'écrit aussi:

$$\frac{1}{p!}(M_1^p + \frac{p!}{(p-1)!}M_1^{p-1}M_2 + \cdots + \frac{p!}{(p-k)!k!}M_1^{p-k}M_2^k + \cdots + M_2^p)$$

soit

$$\frac{1}{p!}(M_1 + M_2)^p.$$

On en déduit donc que

$$\exp M_1 \exp M_2 = \exp(M_1 + M_2).$$

2. Si $M_2 = P^{-1}MP$, alors, pour tout entier p on a

$$M_2^p = P^{-1}M_1^pP.$$

Considérons la somme partielle $S_p = I_n + M_2 + \cdots \frac{1}{p!}M_2^p$ de la série $\exp M_2$. On a alors

$$\begin{aligned}S_p &= I_n + M_2 + \cdots \frac{1}{p!}M_2^p\\ &= I_n + P^{-1}M_1P + \cdots \frac{1}{p!}P^{-1}M_1^pP\\ &= P^{-1}I_nP + P^{-1}M_1P + \cdots \frac{1}{p!}P^{-1}M_1^pP\\ &= P^{-1}(I_n + M_1 + \cdots \frac{1}{p!}M_1^p)P\\ &= P^{-1}\Sigma_pP\end{aligned}$$

où Σ_p est la somme partielle de la série $\exp M_1$. On en déduit donc, par passage à la limite que

$$\exp M_2 = P^{-1}(\exp M)P.$$

Corollaire 1. *Quelle que soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice* $\exp M$ *est inversible et*
$$(\exp M)^{-1} = \exp(-M).$$

Démonstration. En efet, il est évident que les matrices M et $-M$ commutent. On en déduit
$$\exp(M - M) = \exp(M)\exp(-M).$$
Or
$$\exp(M - M) = \exp 0 = I_n.$$
Ainsi
$$\exp(M)\exp(-M) = I_n$$
ce qui prouve le résultat annoncé.

3.2. **Exponentielle d'une matrice diagonale.**

Proposition 3. *Soit D la matrice diagonale*
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
Alors $\exp D$ *est la matrice diagonale*
$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En effet, nous avons vu que pour tout entier p, on a
$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{pmatrix}.$$
On en déduit que chacune des sommes partielles de la série $\exp D$ est une matrice diagonale et donc $\exp D$ est aussi diagonale. Calculons chacun des termes de sa diagonale. le i-ème est
$$1 + \lambda_i + \frac{1}{2!}\lambda_i^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\lambda_i^p + \cdots$$
qui correspond au développement en série de $e^{\lambda\lambda_i}$. D'où le résultat.

3.3. **Exponentielle d'une matrice diagonalisable.**

Proposition 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et soit $D = P^{-1}MP$ une matrice diagonale semblable à M. Alors*
$$\exp M = P(\exp D)P^{-1}.$$

Démonstration. Soit
$$\Sigma_k = I_n + M + \cdots + \frac{1}{k!}M^k$$
la somme partielle de la série $\exp M$. Comme $D = P^{-1}MP$, on a $M = PDP^{-1}$ et donc
$$\Sigma_k = I_n + PDP^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}(PDP^{-1})^k.$$
Or on a vu que
$$(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$$
ce qui donne
$$\Sigma_k = I_n + PDP^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}PD^kP^{-1} = P(I_n + D + \cdots + \frac{1}{k!}D^k)P^{-1}.$$
On en déduit, par passage à la limite
$$\exp M = P(I_n + D + \cdots + \frac{1}{k!}D^k + \cdots)P^{-1} = P(\exp D)P^{-1}.$$

3.4. **La fonction $\exp tM$.**

Fixons nous une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction
$$t \in \mathbb{R} \to \exp tM$$
C'est une fonction d'une variable réelle à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet espace est de dimension n^2 et peut donc être identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$.

Proposition 5. *La fonction*
$$t \in \mathbb{R} \to \exp tM.$$
de la variable réelle t est dérivable et a pour dérivée
$$\frac{d}{dt}\exp tM = M \cdot \exp TM.$$

Démonstration. $\exp tM$ est la somme de la série
$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}t^pM^p.$$
Cette série est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais est sur chacune des composantes (d'une matrice carrée) une série entière réelle. Chacune de ces composantes est donc indéfiniment de fois

dérivable. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp tM &= M + tM^2 + \tfrac{1}{2}t^2M + \cdots + pt^{p-1}\tfrac{1}{p!}M^P + \cdots \\ &= M(I_n + tM + \tfrac{1}{2}t^2M^2 + \cdots + \tfrac{1}{(p-1)!}t^{p-1}M^{p-1} + \cdots \\ &= M\exp tM.\end{aligned}$$

4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

4.1. **Cas homogène.**

EXERCICES

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^p et montrer que l'on a

$$A^p = a_p A + b_p I_3$$

a_p et b_p étant des constantes que l'on déterminera.

Exercice 2. Etudier la suite récurrente linéaire

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}.$$

Trouver la solution correspondant a $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Exercice 3. Etudier les suites récurrentes (u_n) et (v_n) définies par les relations

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = cu_{n-1} + dvn - 1 \end{cases}$$

les termes initiaux u_0 et v_0 étant donnés. Etudier le cas particulier $a = d$, $b = -c$.