

# Polynôme minimal d'une matrice carrée complexe. Le théorème de Cayley-Hamilton

## 1. POLYNÔMES ANNULATEURS D'UNE MATRICE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

### 1.1. Rappel sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ .

Dans ce paragraphe,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des complexes ou le corps des réels. Soit  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée  $X$  et à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ . Un polynôme  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  s'écrit

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p.$$

L'entier  $p$  est le degré de  $P(X)$ . Rappelons également que l'espace vectoriel  $\mathbb{K}[X]$  sur le corps  $\mathbb{K}$  est de dimension infinie et possède une base dénombrable donnée par la famille

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}.$$

On peut définir également dans  $\mathbb{K}[X]$  une multiplication commutative: si  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$  et  $Q(X) = b_0 + b_1X + a_2X^2 + \cdots + b_qX^q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré respectif  $p$  et  $q$ , alors le polynôme  $(PQ)(X) = P(X)Q(X)$  est le polynôme de degré  $p + q$  défini par

$$PQ(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_{p+q}X^{p+q}$$

avec

$$\begin{cases} c_0 = a_0b_0, \\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \\ \dots \\ c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_ib_{k-i} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 \\ \dots \\ c_{p+q} = a_pb_q \end{cases}$$

Cette multiplication est

- (1) commutative:  $(PQ)(X) = P(X)Q(X) = Q(X)P(X)$  pour tout  $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ ,  
 (2) distributive par rapport à l'addition:

$$P(X)(Q_1(X) + Q_2(X)) = P(X)Q_1(X) + P(X)Q_2(X), \quad P(X), Q_1(X), Q_2(X) \in \mathbb{K}[X],$$

- (3) possède un élément unité, à savoir le polynôme

$$1(X) = 1.$$

Muni de l'addition et de cette multiplication,  $\mathbb{K}[X]$  est appelé un anneau. Il existe enfin une dernière opération fondamentale: la division euclidienne: Etant donnés deux polynômes  $P_1(X), P_2(X) \in \mathbb{K}[X]$  de degré respectif  $p_1$  et  $p_2$  avec  $p_1 \geq p_2$ , il existe un unique polynôme  $Q(X)$  appelé quotient et un unique polynôme  $R(X)$  appelé le reste tels que

- (1) degré  $R(X) <$  degré  $P_1(X)$ ,  
 (2)  $P_1(X) = P_2(X)Q(X) + R(X)$ .

Dans le cours de première année, des techniques pour calculer cette division ont été enseignées.

## 1.2. Polynômes annulateurs d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , on note par  $P(A)$  la matrice

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p$$

où  $I_n$  est la matrice identité.

### Exemples.

- (1) Soit  $P(X) = 2 + 3X + 4X^2 \in \mathbb{R}[X]$  et soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$P(A) = 2I_2 + 3A + 4A^2$$

ce qui donne

$$P(A) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & -19 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (2) Soit  $P(X) = X^2 - 4X + 4$  et  $A$  la matrice donnée dans l'exemple précédent. Alors

$$P(A) = 4I_2 - 4A + A^2$$

ce qui donne

$$P(A) = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée et  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$  si la matrice  $P(M)$  est nulle:

$$P(M) = 0.$$

Dans l'exemple (2) précédent, le polynôme  $P(X) = X^2 - 4X + 4$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Notons également que le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice carrée.

**Proposition 1.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice d'ordre  $n$ . Il existe toujours un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à  $n^2$ .

*Démonstration.* On sait que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel de dimension  $n^2$ , une base étant donnée par la famille des matrices carrées ayant tous ses coefficients nuls à l'exception d'un seul que l'on prend égal à 1. Cette famille contient  $n^2$  éléments, ce qui donne la dimension. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La famille de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\{I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2}\}$$

contient  $n^2 + 1$  éléments. Elle est donc liée. Ceci se traduit par l'existence d'une combinaison linéaire de ces matrices qui est égale à 0. Soit

$$(1) \quad a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_{n^2} M^{n^2} = 0.$$

cette relation linéaire. On lui associe le polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}.$$

La relation (1) signifie que le polynôme  $P(X)$  est annulateur de  $M$ :

$$P(M) = 0.$$

## 2. POLYNÔME MINIMAL D'UNE MATRICE COMPLEXE: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

### 2.1. L'ensemble $\mathcal{A}nn(M)$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice complexe. On note par  $\mathcal{A}nn(M)$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $M$ :

$$\mathcal{A}nn(M) = \{P(X) \in \mathbb{C}[X], P(M) = 0\}.$$

Nous avons vu que cet ensemble n'est jamais réduit à 0, dès que  $n > 1$ .

**Proposition 2.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice complexe d'ordre  $n \geq 2$ . Alors

- (1)  $\mathcal{A}nn(M)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ ,
- (2) Si  $P(X) \in \mathcal{A}nn(M)$  et  $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ , alors  $PQ(X) = P(X)Q(X) \in \mathcal{A}nn(M)$ .

*Démonstration.* 1. Nous avons vu que  $\mathcal{Ann}(M)$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{C}[X]$ . Si  $P_1(X), P_2(X) \in \mathcal{Ann}(M)$ , alors  $P_1(M) = P_2(M) = 0$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  et considérons le polynôme  $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X)$ . On a

$$\lambda_1 P_1(M) + \lambda_2 P_2(M) = 0$$

et donc  $\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) \in \mathcal{Ann}(M)$ . Ainsi  $\mathcal{Ann}(M)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .

2. Soient  $P(X) \in \mathcal{Ann}(M)$  et  $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ . Alors  $P(M) = 0$ . On en déduit

$$(PQ)(M) = P(M)Q(M) = 0$$

et donc le polynôme  $(PQ)(X)$  est aussi annulateur de  $M$ .

Ceci étant, considérons un polynôme  $P(X) \in \mathcal{Ann}(M)$  de degré minimum:

$$\forall Q(X) \in \mathcal{Ann}(M), \deg(P(X)) \leq \deg(Q(X)).$$

Nous pouvons donc considérer la division euclidienne de  $Q(X)$  par  $P(X)$ :

$$Q(X) = P(X)Q_1(X) + R(X)$$

avec  $\deg(R(X)) < \deg(P(X))$ . D'après la proposition précédente, le polynôme  $P(X)Q_1(X) \in \mathcal{Ann}(M)$  et donc  $R(X) = Q(X) - P(X)Q_1(X) \in \mathcal{Ann}(M)$ . Mais  $\deg(R(X)) < \deg(P(X))$  et par hypothèse  $P(X)$  est de degré minimum dans  $\mathcal{Ann}(M)$ . On a donc nécessairement  $R(X) = 0$  et donc

$$Q(X) = P(X)Q_1(X).$$

En particulier, si  $P_1(X)$  et  $P_2(X)$  sont deux polynômes de  $\mathcal{Ann}(M)$  de même degré et de degré minimum, alors chacun divise l'autre, c'est-à-dire

$$P_1(X) = aP_2(X)$$

avec  $a \neq 0 \in \mathbb{C}$ . On peut donc énoncer la définition suivante:

**Définition 2.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice carrée complexe. On appelle polynôme minimal de  $M$ , le polynôme annulateur de degré minimum et unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient de plus haut degré égal à 1). On le note  $\mathfrak{m}_M(X)$ .

### Exemples.

(1) Soit  $M = I_n$  la matrice identité. Alors

$$\mathfrak{m}_M(X) = 1 - X.$$

En effet

$$\mathfrak{m}_I(X) = I_n - I_n = 0.$$

Ce polynôme est annulateur et de degré minimum 1.

(2) Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Alors

$$\mathfrak{m}_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$$

En effet, comme  $D$  n'est pas du type  $aI_2$ , son polynôme minimal est de degré au moins égal à 2. Calculons  $\mathbf{m}_D(D)$ . On a

$$\mathbf{m}_D(D) = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2I_2$$

et donc

$$\mathbf{m}_D(D) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\mathbf{m}_D(X)$  est annulateur de  $D$  et de degré minimum dans  $\mathcal{A}nn(D)$ . C'est bien le polynôme minimal.

**Théorème 1.** Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice (non nulle) et  $\mathbf{m}_M(X)$  son polynôme minimal. Alors

- (1) Toutes les valeurs propres de  $M$  sont des racines de  $\mathbf{m}_M(X)$ .
- (2) Si  $\alpha$  est une racine de  $\mathbf{m}_M(X)$ , alors  $\alpha$  est une valeur propre de  $M$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Il existe un vecteur propre  $V$  non nul associé à  $\lambda$ :

$$M.V = \lambda V.$$

(Ici  $V$  est un vecteur colonne). On a alors,

$$\forall K \geq 1, M^K.V = \lambda^K V$$

c'est-à-dire  $\lambda^K$  est une valeur propre de  $M^K$  et  $V$  est toujours un vecteur propre mais pour  $\lambda^K$ . Supposons que

$$\mathbf{m}_M(X) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_0.$$

Alors

$$0 = \mathbf{m}_M(M) = M^r + a_{r-1}M^{r-1} + \dots + a_0I_n.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{m}_M(M).V \\ &= M^r V + a_{r-1}M^{r-1}V + \dots + a_0I_n V \\ &= \lambda^r V + a_{r-1}\lambda^{r-1}V + \dots + a_0V \\ &= (\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0)V \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse  $V \neq 0$ , on en déduit

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0$$

soit

$$\mathbf{m}_M(\lambda) = 0$$

et  $\lambda$  est racine du polynôme minimal.

2. Soit  $\alpha$  une racine de  $\mathbf{m}_M(X)$ :  $\mathbf{m}_M(\alpha) = 0$ . Nous avons alors la factorisation

$$\mathbf{m}_M(X) = (X - \alpha)Q(X).$$

En particulier  $\deg(Q(X)) < \deg(\mathbf{m}_M(X))$ . Comme  $\mathbf{m}_M(X)$  est de degré minimal dans  $\mathcal{A}nn(M)$ , on en déduit que  $Q(X) \notin \mathcal{A}nn(M)$  autrement dit

$$Q(M) \neq 0.$$

Il existe donc un vecteur colonne non nul  $V$  tel que

$$Q(M).V \neq 0.$$

Posons  $V_1 = Q(M).V$ . On a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{m}_M(M).V_1 \\ &= (M - \alpha I_n)Q(M)V \\ &= (M - \alpha I_n)V_1. \end{aligned}$$

Ceci signifie, comme  $V_1 \neq 0$ , que  $\alpha$  est une valeur propre de  $M$ . D'où le théorème.

**Corollaire 1.** Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice complexe et  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  l'ensemble des valeurs propres de  $M$  deux à deux distinctes ( $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ). Alors il existe des entiers non nuls  $s_1, \dots, s_l$  tels que

$$\mathfrak{m}_M(X) = (X - \lambda_1)^{s_1}(X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_l)^{s_l}.$$

Notons, qu'à cette étape, nous n'avons pas de renseignements sur les puissances  $s_i$  sauf qu'elles sont non nulles.

### 3. LE THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Théorème 2.** Soient  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice complexe et  $C_M(X)$  son polynôme caractéristique. Alors  $C_M(X) \in \text{Ann}(M)$ , c'est-à-dire

$$C_M(M) = 0.$$

*Démonstration.* Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que deux matrices semblables avaient le même polynôme caractéristique. Concernant les polynômes annulateurs, nous avons le résultat suivant:

**Lemme 1.** Soient  $M$  et  $M' = Q^{-1}MQ$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors tout polynôme annulateur de l'un est un polynôme annulateur de l'autre:

$$\text{Ann}(M) = \text{Ann}(Q^{-1}MQ).$$

*Démonstration du lemme.* Soit  $P(X)$  un polynôme annulateur de  $M$ . Posons

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$$

ce qui donne

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \cdots + a_pM^p = 0.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} P(Q^{-1}MQ) &= a_0I_n + a_1Q^{-1}MQ + \cdots + a_p(Q^{-1}MQ)^p \\ &= a_0I_n + a_1Q^{-1}MQ + \cdots + a_pQ^{-1}M^pQ \\ &= Q(a_0I_n + a_1M + \cdots + a_pM^p)Q^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème. Comme toute matrice complexe est semblable à une matrice triangulaire, le lemme précédent nous permet de supposer que  $M$  est triangulaire. Ecrivons cette matrice, pour simplifier, sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où  $A$  est une matrice triangulaire d'ordre  $n - 1$ . Le polynôme caractéristique de  $M$  s'écrit alors

$$C_M(X) = (\lambda_1 - X) \det(A - XI_{n-1}) = (\lambda_1 - X)C_A(X).$$

Démontrons le théorème de Cayley-Hamilton par récurrence sur l'ordre  $n$  de la matrice  $M$ .

- (1) Si  $n = 1$ , alors  $M = (a)$ ,  $C_M(X) = (a - X)$  et  $C_M(M) = aI_1 - M = 0$ .
- (2) Supposons le résultat vrai pour toute matrice complexe d'ordre  $n - 1$ . Comme la matrice  $A$  est d'ordre  $n - 1$ , d'après cette hypothèse de récurrence

$$C_A(A) = 0.$$

Calculons  $C_A(M)$ . Posons pour cela

$$C_A(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1}.$$

Alors

$$C_A(M) = b_0I_n + b_1M + \cdots + b_{n-1}M^{n-1}.$$

Mais, pour tout entier  $k$

$$M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$C_A(M) = \begin{pmatrix} C_A(\lambda_1) & 0 \\ 0 & C_A(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_A(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $C_M(X) = (\lambda_1 - X)C_A(X)$ , on obtient

$$C_M(M) = (\lambda_1 I_n - M)C_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 I_{n-1} - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_A(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la propriété est vraie à l'ordre  $n$ .

- (3) Elle est donc vraie pour tout  $n$ .

D'où le théorème.

**Corollaire 2.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice non nulle. Alors le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique de  $M$ :

$$C_M(X) = \mathbf{m}_M(X)Q(X).$$

De plus, si on pose

$$C_M(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} (X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_l)^{s_l}$$

alors

$$\mathbf{m}_M(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_l)^{r_l}$$

avec

$$1 \leq r_i \leq s_i$$

pour tout  $i = 1, \dots, l$ .

#### 4. CALCUL PRATIQUE DU POLYNÔME MINIMAL

Les résultats précédents nous fournissent une méthode, certes parfois un peu longue), de calcul du polynôme minimal d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donnée.

- (1) Détermination du polynôme caractéristique  $C_M(X)$
- (2) Calcul des valeurs propres c'est-à-dire des racines de  $C_M(X)$ . Notons, toutefois, que ce calcul est loin d'être anodin. Rappelons que les racines d'un polynôme de degré 2  $P(X) = aX^2 + bX + c$  sont données par les formules classiques

$$\alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que les racines d'un polynôme de degré 3 réduit à sa forme canonique  $P(X) = X^3 + pX + q$  sont données par les formules de Cardan:

$$j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})} + j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

avec  $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ ,  $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$  et  $k = 1, 2, 3$ . Par contre, au delà du degré 5, le célèbre résultat d'Evariste Galois précise qu'il n'existe aucune formule de ce type donnant directement les racines des équations de degré supérieur ou égal à 5. Ceci fait l'objet du cours de L3 intitulé Théorie des corps, disponible également sur ce site. Donc, pour ce type d'équations, on se débrouille en pensant peut-être aux racines évidentes, s'il y en a!!!!

- (3) On factorise le polynôme caractéristique:

$$C_M(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} (X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_l)^{s_l}.$$

- (4) On cherche parmi tous les polynômes du type

$$(X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_l)^{r_l}$$

avec  $1 \leq r_i \leq s_i$  celui de plus bas degré qui est annulateur de  $M$ . On commence par celui de plus bas degré:

$$(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_l).$$



S'il est annulateur c'est le bon, sinon on augmente méthodiquement les puissances de chaque facteur.

**Exemple.**

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = -(X + 1)^2(X - 3).$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 3$ , racine simple et  $\lambda_2 = -1$ , racine double. On en déduit que le polynôme minimal est l'un des polynômes suivants, rangés par degré croissant:

- (1)  $P_1(X) = (X + 1)(X - 3)$
- (2)  $P_2(X) = (X + 1)^2(X - 3)$ .

En effet ce sont les seuls polynômes ayant  $-1$  et  $3$  comme racines et n'ayant que ces racines de multiplicité inférieure ou égale à celle du polynôme caractéristique. Pour déterminer lequel des  $P_i(X)$  est minimal, on commence par prendre celui de plus bas degré, ici  $P_1(X)$ . On vérifie s'il est annulateur. S'il est annulateur, il est minimal. Sinon, on prend le suivant dans la liste. Comme ils sont rangés par degré croissant, le premier polynôme annulateur rencontré sera le bon. On a

$$P_1(M) = (M + I_3)(M - 3I_3).$$

Soit

$$P_1(M) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $P_1(X)$  n'est pas annulateur. On en déduit que  $P_2(X)$  est annulateur. En fait  $P_2(X)$  est, au signe près, le polynôme caractéristique, il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Mais les ultra-sceptiques peuvent vérifier:

$$P_2(M) = (M + I_3)^2(M - 3I_3).$$

Soit

$$P_2(M) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5. POLYNÔME MINIMAL D'UN ENDOMORPHISME

### 5.1. Les endomorphismes $P(f)$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit

$$f : E \rightarrow E$$

un endomorphisme de  $E$ . On notera par  $\mathcal{E}nd(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ . Rappelons qu'il est muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n^2$  où  $n = \dim E$ .

La composition  $f \circ g$  de deux endomorphismes de  $E$  est encore un endomorphisme de  $E$ . En général ce produit n'est pas commutatif. On note par

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f$$

la différence entre les composés de  $f$  et  $g$ . Ce crochet traduit la non commutativité de ce produit donné par la composition. Rappelons enfin que, si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base fixée de  $E$ , alors la matrice de  $f \circ g$  relative à cette base est le produit  $AB$  où  $A$  est la matrice de  $f$  relative à cette base et  $B$  celle de  $g$ .

Soit  $f \in \mathcal{E}nd(E)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}, n > 0$ , on note  $f^n$  la composition de  $f$  par lui-même  $n$  fois:

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Par convention, on a

$$f^0 = Id_E$$

où  $Id_E$  est l'application identique de  $E$ . Soit  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$  :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p.$$

On note par  $P(f)$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$P(f) = a_0Id_E + a_1f + \dots + a_pf^p.$$

**Proposition 3.** Soient  $f \in \mathcal{E}nd(E)$  et  $P(X), Q(X)$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

*Démonstration.* En effet, si  $PQ(X)$  désigne le produit  $P(X)Q(X)$ , alors  $P(f) \circ Q(f) = PQ(f)$  et  $Q(f) \circ P(f) = QP(f)$ . Comme  $P(X)Q(X) = Q(X)P(X)$  les polynômes  $PQ(X)$  et  $QP(X)$  sont égaux et donc

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

**Proposition 4.** Soit  $f \in \mathcal{E}nd(E)$ . Soient  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $M$  la matrice de  $f$  relative à cette base. Alors pour tout  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ , la matrice  $P(M)$  est la matrice de l'endomorphisme  $P(f)$  relative à cette base.

*Démonstration.* Ceci est une conséquence directe de la propriété suivante: si  $M$  est la matrice de  $f$  relative à une base donnée, alors  $M^k$  est la matrice de  $f^k$  par rapport à cette même base.

## 5.2. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

**Définition 3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $f \in \mathcal{E}nd(E)$  un endomorphisme de  $E$ . Un polynôme  $P(X)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un polynôme annulateur de  $f$  si l'endomorphisme  $P(f)$  est identiquement nul:

$$P(f)(v) = 0, \quad \forall v \in E.$$

Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $f$  relative à cette base, alors tout polynôme annulateur de  $f$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Ceci ne dépend pas de la base choisie, nous avons vu dans les paragraphes précédents que l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice coïncide avec l'ensemble des polynômes annulateurs de toute matrice semblable.

**Conséquence:** Pour déterminer les polynômes annulateurs d'un endomorphisme  $f$  de  $E$ , il suffit de considérer la matrice de  $f$  dans une base choisie et de déterminer les polynômes annulateurs de la matrice de  $f$  relative à cette base. Notons que l'on peut également déterminer ces polynômes annulateurs sans passer par le calcul matriciel

**Exemple.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un projecteur autre que l'identité. Dire que  $f$  est un projecteur signifie que

$$f^2 = f.$$

Ainsi

$$f^2 - f = 0.$$

Soit  $P(X) = X^2 - X$ . On a bien  $P(f) = 0$  et donc  $P(X)$  est bien annulateur.

### 5.3. Polynôme minimal d'un endomorphisme.

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Notons par  $\mathcal{A}nn(f)$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$ . Si  $M$  est la matrice de  $f$  relative à une base donnée, alors  $\mathcal{A}nn(f)$  est un espace vectoriel isomorphe à  $\mathcal{A}nn(M)$ . Si  $\mathbf{m}_M(X)$  est le polynôme minimal de  $A$ , il vérifie aussi  $\mathbf{m}_M(f) = 0$ . On résume tout ceci dans la proposition suivante:

**Proposition 5.** *Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Il existe un unique polynôme unitaire, noté  $\mathbf{m}_f(X)$  et appelé le polynôme minimal de  $f$ , tel que*

- (1)  $\mathbf{m}_f(f) = 0$ ,
- (2) Pour tout polynôme  $P(X)$  annulateur de  $f$ , on ait  $P(X) = \mathbf{m}_f(X)Q(X)$ ,
- (3) Si  $M$  est la matrice de  $f$  relative à une base de  $E$  donnée, alors  $\mathbf{m}_A(X) = \mathbf{m}_f(X)$ .

#### Remarques.

- (1) **Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .** Dans la première partie de ce chapitre, nous avons donné une méthode pour calculer  $\mathbf{m}_A(X)$  et donc  $\mathbf{m}_F(X)$  en utilisant les valeurs propres et le polynôme caractéristique et  $f$  ou de  $A$ , sachant que dans ce cas ce polynôme est scindé, c'est-à-dire s'écrit comme un produit de facteurs du premier degré.
- (2) **Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .** Le théorème de Cayley-Hamilton est encore vrai dans le cas réel

**Théorème 3.** *Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Alors son polynôme caractéristique est un annulateur de  $f$ .*

Le polynôme minimal peut donc être calculé en considérant que  $E$  est un espace vectoriel complexe. Le polynôme calculé sera donc complexe. Mais comme les racines seront deux-à-deux conjuguées, on regroupe les racines conjuguées pour avoir une expression réelle de ce polynôme.

**Exemple.** Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On a

$$C_M(X) = X^2 - 2X \cos \theta + 1.$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \frac{2 \cos \theta + i\sqrt{4 - 4 \cos^2 \theta}}{2}, \lambda_2 = \frac{2 \cos \theta - i\sqrt{4 - 4 \cos^2 \theta}}{2}.$$

Ainsi

$$C_M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2).$$

On en déduit, que dans le cas complexe

$$\mathbf{m}_M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2).$$

Ainsi, dans le cas réel

$$\mathbf{m}_M(X) = X^2 - 2X \cos \theta + 1.$$

## EXERCICES

*Exercice 1* Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
- (2) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .
- (3) Vérifier sur cette matrice le théorème de Cayley-Hamilton.

*Exercice 2* Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
- (2) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

*Exercice 3* Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
- (2) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

*Exercice 4* Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de  $A$ .
- (2) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

*Exercice 5* Soit  $E$  un espace vectoriel complexe et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$\begin{cases} f^3 - 3f^2 + 2f = 0, \\ f^8 + 16f^4 = 0. \end{cases}$$

- (1) Déterminer le polynôme minimal de  $f$ .
- (2) En déduire  $f$ .

*Exercice 6* Montrer que si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie, et si  $f$  est un endomorphisme non nul, alors on n'a pas nécessairement  $\text{Ann}(f) \neq 0$ . On considère pour cela l'espace vectoriel  $E$  formé des suites  $v = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  numériques réelles.

- (1) Soit  $e_k$  la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice  $k$  qui vaut 1. Montrer que la famille  $\{e_1, \dots, e_k, \dots\}$  est une base de  $E$ . En déduire que  $E$  est de dimension infinie.

(2) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  définie par

$$f(e_k) = e_{k+1}.$$

Montrer que si  $P(X)$  est un polynôme annulateur de  $f$ , alors  $P(X) = 0$ .