Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2018/2019**
Licence 2 Physique Chimie - Cycles - CPB2

ALGEBRE LINEAIRE et APPLICATIONS

Feuille d'exercices 2. Diagonalisation des endomorphismes réels ou complexes

Exercice 1. Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^2$ ayant pour matrice respective dans la base canonique $\mathcal{B}$ les matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix},$$

1. Calculer le polynôme caractéristique ainsi que les valeurs propres de f (avec leurs multiplicités) .
2. L'endormorphisme f est-il diagonalisable ? Si c'est le cas, on donnera une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, la matrice de f dans cette nouvelle base ainsi que la relation matricielle qui lie les matrices de f dans la base canonique et la base $\mathcal{B}'$.
3. Mêmes questions pour l'endomorphisme g.
4. Mêmes questions si on considère que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 2. Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice respective dans la base canonique les matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B et déterminer leurs valeurs propres.
2. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

Exercice 3. Soit les endomorphisme f et g de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice respective dans la base canonique les matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B et déterminer leurs valeurs propres.
2. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisables ?

Exercice 4. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(e_1 + e_2)$ où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire des valeurs propres de f.
2. Calculer la valeurs propres de f.
3. Est-il diagonalisable ?

Exercice 5. Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable et le diagonaliser.

Exercice 6. Soit A une matrice carrée. Elle est dite nilpotente s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

1. Donner un exemple d'une matrice non nulle nilpotente d'ordre 2.
2. Déterminer les valeurs propres de A (on déterminera au préalable les valeurs propres de A^n en fonction de celles de A).
3. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente.

Exercice 7. On désigne par f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de f est
$$c_f(X) = -(X+1)^3.$$
2. Montrer sans calcul que f n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer le sous espace propre de f.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de a la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & (1+a) \end{pmatrix}.$$

est diagonalisable ? Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n.

Exercice 9. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^2$ et en déduire A^2.