Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2020/2021**
L2 Physique Chimie - Renfort - CPB2

ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS

TD3

Exercice 1

On considère $f \in End(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

$$c_f(X) = c_A(X) = det(A - XId) = -(X-1)^2(X+1).$$

Les valeurs propres de f sont les racines réelles du polynôme caractéristique donc

- $\lambda_1 = 1$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 2$ et
- $\lambda_2 = -1$ est valeur propre de f de multiplicité $r_2 = 1$.

2. Déterminer les espaces propres de f

L'espace propre associé à $\lambda_1 = 1$ est $E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 Id) = Ker(f - Id)$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E_{\lambda_1} = Ker(f - Id) &\Leftrightarrow (A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 \\ 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -4x + 6y + 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3y + 2z = 0\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}E_{\lambda_1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y + 2z = 0\} \text{ (c'est un plan vectoriel de } \mathbb{R}^3) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = \tfrac{3}{2}y + z\} \\ &= \{(\tfrac{3}{2}y + z, y, z);\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0,1), (\tfrac{3}{2}, 1, 0)\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(3,2,0)}_{v_2}\}.\end{aligned}$$

La famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de E_{λ_1} et c'est aussi aussi une famille libre (car 2 vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de E_{λ_1} et $\dim E_{\lambda_1}$ =

$card\{v_1, v_2\} = 2$. L'espace propre associé à $\lambda_2 = -1$ est $E_{\lambda_2} = Ker(f - \lambda_2 Id) = Ker(f + Id)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_2} = Ker(f+Id) &\Leftrightarrow (A+Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -4 & 8 & 4 \\ 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y + 4z = 0 \\ -4x + 8y + 4z = 0 \\ 4x - 6y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ -x + y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3;\ x = y = -z\} &= \{(x, x, -x); x \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1,1,-1)}_{v_3}\} \text{ (c'est une droite vectoriel de } \mathbb{R}^3)
\end{aligned}$$

La famille $\{v_3\}$ est une famille génératrice de E_{λ_2} et c'est aussi aussi une famille libre (car $v_3 \neq \overrightarrow{0}$) donc c'est une base de E_{λ_2} et $\dim E_{\lambda_2} = card\{v_3\} = 1$.

3. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser en précisant la matrice de passage P ainsi que P^{-1}.

   On a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} r_i = r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3 = dim(\mathbb{R}^3), \\ \dim E_{\lambda_1} = 2 = r_1, \\ \dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2. \end{cases}$$

   D'après le critère de diagonalisation, l'endomorphisme f est diagonalisable.

   Considérons la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$, concaténation d'une base de E_{λ_1} et de E_{λ_2}. Puisque f est diagonalisable, c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (rappelons que les espaces propres sont en somme directe donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ et puisqu'on a une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$, i.e. $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \mathbb{R}^3$ ce qui signifie que les espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$).

   On a donc

$$A' = Mat_{f, \{v_1, v_2, v_3\}} = P^{-1}AP$$

   où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' est alors

$$A' = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}.$$

On obtient ce résultat car

(a) le vecteur $v_1 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_1) = \lambda_1 v_1 = v_1$

(b) le vecteur $v_2 \in E_{\lambda_1}$ donc $f(v_2) = \lambda_1 v_2 = v_2$

(c) le vecteur $v_3 \in E_{\lambda_2}$ donc $f(v_3) = \lambda_2 v_3 = -v_3$

On retrouve ce résultat en faisant le calcul

$$A' = Mat_{f,\{v_1,v_2,v_3\}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} AP$$

(rappelons que la matrice $P^{-1} = \frac{1}{detP}\ {}^tCom(P)$).
On aura besoin de la matrice P^{-1} pour la suite de l'exercice.

4. Calculer les matrices A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $Exp(A)$.
On a

$$A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$$

et

$$A^n = P(A')^n P^{-1}.$$

Or puisque A' est diagonale, on a

$$(A')^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2(-1)^n & 3-3(-1)^n & 2-2(-1)^n \\ -2+2(-1)^n & 4-3(-1)^n & 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & -3+3(-1)^n & -1+2(-1)^n \end{pmatrix}$$

La matrice $ExpA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (cette série est toujours convergente) On a

$$ExpA = PExp(A')P^{-1}$$

mais, puisque A' est diagonale, on a

$$Exp(A') = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} ExpA &= PExp(A')P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & 3e & e^{-1} \\ 0 & 2e & e^{-1} \\ e & 0 & -e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e+2e^{-1} & 3e-3e^{-1} & 2e-2e^{-1} \\ -2e+2e^{-1} & 4e-3e^{-1} & 2e-2e^{-1} \\ 2e-2e^{-1} & -3e+3e^{-1} & -e+2e^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. On considère les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par leur premier terme $u_0 = -1, v_0 = 2$ et $w_0 = 1$ et les relations suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 7v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - 6v_n - 3w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Exprimer X_{n+1} en fonction d'une matrice A et X_n.

On a $X_{n+1} = AX_n$. D'où

$$X_n = A^n X_0$$

avec

$$X_n = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$X_n = P(A')^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 9-10(-1)^n \\ 12-10(-1)^n \\ -9+10(-1)^n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 0$

En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

On a donc

$$\begin{cases} u_n = 9-10(-1)^n \\ v_n = 12-10(-1)^n \\ w_n = -9+10(-1)^n \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires

1.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 donnés.

on a

$$X'(t) = AX(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in End(\mathbb{R}^2)$ (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) de matrice A dans la base canonique. Alors

$$\begin{aligned} c_f(X) &= c_A(X) = det(f - XId) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(1-X) - 3 = X^2 - 1 - 3 = X^2 - 4 = (X-2)(X+2) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité $r_2 = 1$.

On a $r_1 + r_2 = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$ et pour $i \in \{1, 2\}$, $1 \geq dim(E_{\lambda_i}) \geq r_i = 1$ ce qui implique que $dim(E_{\lambda_i} = 1 = r_i$. D'après la critère de diagonalisation des endomorphismes, f est diagonalisable et il existe P inversible telle que

$$A' = P^{-1}AP$$

est diagonale. Prenons P la matrice de passage de $\{v_1, v_2\}$ à la base canonique $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ avec $\{v_i\}$ une base de l'espace propre E_{λ_i}, alors

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On aura cependant besoin de calculer les espaces propres pour avoir explicitement la matrice P, P^{-1}, ainsi que $ExpA$, A^n, etc.

Déterminons $E_{\lambda_1} = Ker(f - 2Id)$ l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E_{\lambda_1} = Ker(f - 2Id) &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2Id \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow x = 3y \end{aligned}$$

D'où

$$E_{\lambda_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 3y\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(3, 1)}_{v_1}\}.$$

De même on montre que

$$E_{\lambda_2} = Ker(f + 2Id) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -y\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\underbrace{(1, -1)}_{v_2}\}.$$

Ainsi en prenant $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\{v_1, v_2\}$ à la base canonique, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)}\, {}^t Com(P) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La solution du système différentiel est

$$\begin{aligned} X(t) &= Exp((t-t_0)A)X_0 = Exp(tA)X_0 P Exp(tA')P^{-1}X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Exp\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t}+e^{-2t} & 3e^{2t}-3e^{-2t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & e^{2t}+3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} (3e^{2t}+e^{-2t})x_0 + (3e^{2t}-3e^{-2t})y_0 \\ (e^{2t}-e^{-2t})x_0 + (e^{2t}+3e^{-2t})y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{4}[(3e^{2t}+e^{-2t})x_0 + (3e^{2t}-3e^{-2t})y_0] \\ y_n = \frac{1}{4}[(e^{2t}-e^{-2t})x_0 + (e^{2t}+3e^{-2t})y_0] \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 donnés.

on a

$$X'(t) = AX(t)$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable

   On calcule le polynôme caractéristique et on trouve

$$c_f(X) = -(X-2)^2(X-1)$$

donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité $r_1 = 1$.

On détermine les espaces propres:

$$E_{\lambda_1=2} = Ker(f - 2Id) = Vect_{\mathbb{R}}\{(1,0,1),(3,2,0)\}$$

et $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (3,2,0)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=2}$ (puisque $E_{\lambda_1=2} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$) et c'est aussi une famille libre puisque les deux vecteurs sont non colinéaires.

$$E_{\lambda_2=1} = Ker(f - Id) = Vect_{\mathbb{R}}\{(-1,-1,1)\}$$

et $\{v_3 = (-1,-1,1)\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_2=1}$ (puisque $E_{\lambda_2=1} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_3\}$) et c'est aussi une famille libre puisque le vecteur $v_3 \neq \overrightarrow{0}$.

On a donc $r_1 + r_2 = 3 = \mathbb{R}^3$, $\dim E_{\lambda_1=2} = 2 = r_1$ et $\dim E_{\lambda_2=1} = 1 = r_2$ donc, d'après le critère de diagonalisation, f est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

   On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$A' = P^{-1}AP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} .$$

   On peut vérifier que le produit des matrices

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

   avec x_0, y_0 et z_0 donnés.

   Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, $X'(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$ et A est la matrice de la question 1 et elle est donc diagonalisable.

On a

$$X(t)=Exp[(t-t_0)A]X_0=Exp[(t)A]X_0 \text{car ici } t_0=0.$$

Or

$$\begin{aligned}
Exp(tA) &= PExp(tA')P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-1\\-1&2&1\\-2&3&2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}e^{2t}&3e^{2t}&-e^t\\0&2e^{2t}&-e^t\\e^{2t}&0&e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-1\\-1&2&1\\-2&3&2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-e^{2t}+2e^t&3e^{2t}-3e^t&2e^{2t}-2e^t\\-2e^{2t}+2e^t&4e^{2t}-3e^t&2e^{2t}-2e^t\\2e^{2t}-2e^t&-3e^{2t}+3e^t&-e^{2t}+2e^t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$X(t)=Exp(tA)X_0=\begin{pmatrix}[-e^{2t}+2e^t]x_0+[3e^{2t}-3e^t]y_0+[2e^{2t}-2e^t]z_0\\ [-2e^{2t}+2e^t]x_0+[4e^{2t}-3e^t]y_0+[2e^{2t}-2e^t]z_0\\ [2e^{2t}-2e^t]x_0+[-3e^{2t}+3e^t]y_0+[-e^{2t}+2e^t]z_0\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases}x(t)=[-e^{2t}+2e^t]x_0+[3e^{2t}-3e^t]y_0+[2e^{2t}-2e^t]z_0\\ y(t)=[-2e^{2t}+2e^t]x_0+[4e^{2t}-3e^t]y_0+[2e^{2t}-2e^t]z_0\\ z(t)=[2e^{2t}-2e^t]x_0+[-3e^{2t}+3e^t]y_0+[-e^{2t}+2e^t]z_0\end{cases}$$

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{cases}u_{n+1}=-u_n+v_n+w_n\\ v_{n+1}=u_n-v_n+w_n\\ w_{n+1}=u_n+v_n-w_n\end{cases}$$

A quelles conditions sur u_0, v_0, w_0, ces suites sont-elles convergentes?

Exercice 5

Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $A^k=O_n$. Le plus petit k tel que $A^k=O_n$ est alors appelé l'indice de nilpotence de A.

Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}5&-7&-2\\3&-4&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est nilpotente et précisez son indice de nilpotence.

   On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = 0_{3\times 3}.$$
   donc A est nilpotente d'ordre 3.

2. La matrice A est-elle diagonalisable?

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique. On montre que le polynôme caractéristique de f (et de A) est
$$c_f(X) = c_A(X) = -X^3$$
   donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de f (et de A de multiplicité $r = 3$. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que
$$P^{-1}AP = 0_{3\times 3} \Leftrightarrow A = P \times 0_{3\times 3} \times P^{-1} = 0_{3\times 3}.$$
   Comme $A \neq 0_{3\times 3}$, elle n'est pas diagonalisable. (on aurait aussi pu démontrer que la matrice A n'était pas diagonalisable en montrant que l(espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ de f n'est pas de dimension 3, i.e $\dim E_{\lambda=0} \neq 3 = r$)

3. Déterminer les matrices A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $Exp(A)$

   On a calculer A^n pour $n \geq 3$. Pour $n > 3$, on a $A^n = A^{n-1} = A \times 0_{3\times 3} = 0_{3\times 3}$. Pour calucler $Exp(A)$ on utilise la formule
$$ExpA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = Id + A + \frac{1}{2}A^2$$
$$(A \text{ est nilpotente d'ordre 3 donc tous les termes qui suivent sont nuls})$$
   d'où
$$\begin{aligned} ExpA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -\frac{17}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$