Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2020/2021**
L2 Physique Chimie - Renfort - CPB2

ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS

TD3

Exercice 1

On considère $f \in End(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -4 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.
2. Déterminer les espaces propres de f.
3. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser en précisant la matrice de passage P ainsi que P^{-1}.
4. Calculer les matrices A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $Exp(A)$.
5. On considère les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par leur premier terme $u_0 = -1, v_0 = 2$ et $w_0 = 1$ et les relations suivantes

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + 6v_n + 4w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 7v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n - 6v_n - 3w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Exprimer X_{n+1} en fonction d'une matrice A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires

1. $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\, y(0) = y_0 \end{cases}$$

   avec x_0, y_0 donnés.

2.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 donnés.

Exercice 3

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable
2. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 et z_0 donnés.

Exercice 4

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelles conditions sur u_0, v_0, w_0, ces suites sont-elles convergentes?

Exercice 5

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = O_n$. Le plus petit k tel que $A^k = O_n$ est alors appelé l'indice de nilpotence de A.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est nilpotente et précisez son indice de nilpotence.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Déterminer les matrices A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $Exp(A)$.