UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Physique-Chimie-SPI

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE et APPLICATIONS

Elisabeth REMM

Chapitre 1- EXERCICES

Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Cette matrice est-elle inversible ?
2. Si oui calculer l'inverse.
3. En déduire la solution du système linéaire

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer pour tout n entier positif B^n.
2. Donner un exemple d'un produit de matrice nul dont aucun des facteurs n'est nul.

Exercice 3.

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n réelle vérifiant $A^2 = Id$. Est-elle inversible ? Quelle est son inverse ?
2. Soit B une matrice carrée d'ordre n vérifiant $B \cdot {}^tB = Id$. Calculer le déterminant et l'inverse de B.

Exercice 4. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 x_2 = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3.

1. Montrer que c'est un espace vectoriel réel de dimension finie.
2. Soit $so(3)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices vérifiant
$$M = -{}^tM.$$
Montrer que c'est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $GL(3,\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 6. Dans un espace vectoriel E à quatre dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$ de composantes
$$\overrightarrow{X_1} = (2,1,4,-3),\ \overrightarrow{X_2} = (1,-1,-1,-3),\ \overrightarrow{X_3} = (1,2,5,0).$$

1. Montrer que ces vecteurs sont linéairement dépendants et donner une relation par laquelle ils sont liés.
2. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs et en donner une base.
3. Compléter cette base pour obtenir une base de E

Exercice 7. Dans un espace vectoriel complexe à trois dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on donne les vecteurs
$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{e_2} + i\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{e_3} + i\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{e_1} + i\overrightarrow{e_2}.$$

Montrer que ces trois vecteurs forment une base et trouver dans cette base les composantes du vecteurs $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels F_1,F_2 et F_3 sont dits supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}$$
avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2$ et $\overrightarrow{X_3} \in F_3$.

1. Soient F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, F_2 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ et F_3 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0,2,0)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.
2. Soit F_4 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_4} = (1,2,1)$, F_5 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (1,1,0)$ et F_6 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0,1,1)$. Montrer que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i,j = 4,5,6$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 9 On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0,\ \text{et } x + z = 0\right\}$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$, $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?
4. On pose G le sous-espace engendré par $\{u_1, u_2, u_3\}$. Quelle sa dimension ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et un élément de G ?

Exercice 10 On considère dans $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}
&v_1 = (1, 2, 0, 1)\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (2, 2, 2, 2),\\
&w_1 = (1, 2, 1, 0)\ w_2 = (-1, 1, 1, 1),\ w_3 = (2, -1, 0, 1),\ w_4 = (2, 2, 2, 2).
\end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3,
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.
3. Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est liée.
4. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre.
5. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4. Déterminer une base de G.
6. Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires.

Exercice 11

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de r«efléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 13

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 14

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\{f'_1, f'_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de u dans les nouvelles bases.

Exercice 15

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.