UHA - ENSISA

ENSISA 1ère année
Mathématiques: Outils pour le calcul scientifique
Elisabeth REMM

Chapitre 3

Transformation de Fourier

Contents

Introduction:

Le son est de nature ondulatoire. Il correspond à une vibration qui se propage dans le temps. Pourtant, quand on écoute un instrument de musique, on n'entend pas une vibration (fonction du temps), mais une note, c'est-à-dire une fréquence. Notre oreille a donc pesé le poids relatif de chaque fréquence dans le signal temporel : elle a calculé la transformée de Fourier du signal original.

La transformée de Fourier permet aussi de résoudre des équations différentielles ou des équations de convolution, qu'elle transforme en équations algébriques.

1. Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est une sorte d'analogue au développement en série de Fourier (sous sa forme complexe) d'une fonction T-périodique.

1.1. **Définition.**

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (f fonction réelle ou complexe, d'une variable réelle). On appelle transformée de Fourier de f et on note $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (fonction complexe d'une variable réelle) définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par :*

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

Si f est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ est convergente) alors la transformée de Fourier de f, $\mathcal{F}(f)$, est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la transformation de Fourier ne s'applique qu'à une catégorie restreinte de fonctions: de nombreuses fonctions usuelles, par exemple $f(t) = t, f(t) = \sin t$ ou $f(t) = e^t$ ne sont pas transformable au sens de Fourier du fait que l'intégrale de Fourier associée diverge en $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice Montrer que la fonction $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0,\ 0$ sinon n'admet pas de transformé e de Fourier.

L'hypothèse $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie donc que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$$

est convergente. Cela implique que l'intégrale généralisée à paramètre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

converge normalement et donc la transformée de Fourier de f existe pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. De plus, le convergence normale implique que $\widehat{f}$ est continue.

La transformée de Fourier existe pour certaines fonctions n'appartenant pas à $L^1(\mathbb{R})$ par exemple la fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ par contre

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt$$

est convergente donc la transformée de Fourier de f est bien définie.

On pourrait aussi montrer qu'il existe des fonctions f qui ont une transformée de Fourier $\widehat{f}$ mais dont la transformée de Fourier de $\widehat{f}$ n'existe pas (l'intégrale généralisée correspondante est divergente) et en particulier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la fonction $\widehat{f}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. **Cet espace n'est donc pas stable par la transformation de Fourier.** Cependant, si l'on prend la fonction f dans $L^1(\mathbb{R})$ on récupère des propriétés sur la fonction $\widehat{f}$ telles que:

Théorème 1. *Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ est continue et bornée.*

1.2. **Exemple.** Calculons la transformée de Fourier de la fonction triangle:

$$f(t) = \begin{cases} 1+t \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-t \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de f est

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-i\omega t}dt.$$

On a, pour tout $\omega \neq 0$, en intégrant par parties,

$$\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}dt = \left[(1+t)\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}dt = \frac{-1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{0} = \frac{-1}{i\omega} + \frac{1-e^{i\omega}}{\omega^2}$$

et

$$\int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}dx = \left[(1-t)\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{0}^{1} - \frac{1}{i\omega}\int_{0}^{1} e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{i\omega}\left[\frac{e^{i\omega t}}{-i\omega}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{i\omega}-1}{\omega^2}$$

d'où

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2-2\cos(\omega)}{\omega^2} = \frac{2(1-\cos(2\frac{\omega}{2}))}{\omega^2} = \frac{4sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}.$$

De plus pour $\omega = 0$ on trouve $\mathcal{F}(f)(0) = 1$ et c'est la limite quand ω tend vers 0 de la fonction que l'on a trouvée précédemment donc on a, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{2-2\cos(\omega)}{\omega^2} = \frac{2(1-\cos(2\frac{\omega}{2}))}{\omega^2} = \frac{4sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}$$

(en considérant cette fonction comme prolongée par continuité en 0).

1.3. **Transformées de Fourier classiques.**

fonction f (variable t) (temporel)	trans. de Fourier $\widehat{f}$ (variable ω) (frequentiel)
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\omega^2}{4a}}$
$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \|t\| \leq L \\ 0 \text{ si } \|t\| > L \end{cases}$	$2\ \frac{\sin(L\omega)}{\omega}$

pour $a > 0$.

2. Propriétés de la transformée de Fourier

2.1. **Linéarité de la transformation de Fourier.** La transformée de Fourier est linéaire: Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{F}(f) + \mu\mathcal{F}(g).$$

2.2. **Dérivabilité de $\widehat{f}$ (du côté fréquentiel).** D'après les résultats rappelés au chapitre 1 sur les fonctions définies par des intégrales, si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-i\omega t} f(t)dt$$

converge uniformément, par exemple si $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $\widehat{f}$ est dérivable et on a

$$\widehat{f}\,'(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-i\omega t} f(t)dt.$$

Plus généralement, si $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est n-fois dérivable et

$$\widehat{f}\,^{(n)}(\omega) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-i\omega t} f(t)dt.$$

2.3. **Dérivabilité dans le domaine temporel.**

Théorème 2. *(Dérivation dans le domaine temporel) Si f est de classe $C^1(\mathbb{R})$ (dérivable et de dérivée continue) et f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors f vérifie*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 = \lim_{t\to-\infty} f(t)$$

et on peut en déduire que

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$$

et aussi

$$\lim_{\omega\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = 0 = \lim_{\omega\to-\infty} \widehat{f}(\omega)$$

Les propriétés pour la fonction $\widehat{f}$ s'obtiennent par intégration par parties

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

d'où

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Ceci entaîne que

$$\lim_{\omega\to+\infty} \widehat{f}(\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{\widehat{f}'(\omega)}{i\omega} = 0$$

car la fonction $\widehat{f}'$ est bornée.

2.4. **Autres propriétés.** On a le tableau suivant

f (variable t)	$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ (variable t)
$f(t)e^{i\alpha t}$	$\widehat{f}(\omega - \alpha)$ (Decalage domaine frequentiel)
$f(t-\alpha)$ (Decalage domaine temporel)	$e^{-i\omega\alpha}\widehat{f}(\omega)$
$(-it)^n f(t)$	$\widehat{f^{(n)}}(\omega)$
$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p \widehat{f}(\omega)$
$f\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$ (Changement echelle)	$\lvert\lambda\rvert \widehat{f}(\lambda\omega)$

Pour tout f de $L_1(\mathbb{R})$ la fonction $\widehat{f}$ est continue et tend vers 0 en l'infini.

On dit que la transformée de Fourier échange la régularité et la décroissance en l'infini.

Remarque: La première ligne du tableau signifie par exemple que, pour $g : t \rightarrow f(t)e^{i\alpha t}$ on a

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \alpha)$$

ce qu'on écrira plus simplement (par abus de language),

$$\mathcal{F}(f(t)e^{i\alpha t})(\omega) = \widehat{f}(\omega - \alpha)$$

ce qui évite d'avoir à introduire la fonction g et montre bien le lien avec la fonction f.

Remarque: Il est possible de choisir une définition alternative pour la transformation de Fourier. Ce choix est une affaire de convention dont les conséquences ne se manifestent (en général) que par des facteurs multiplicatifs constants. Par exemple, certains utilisent :

$$\mathcal{F}_1(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)dx$$

ou encore

$$\mathcal{F}_2(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x\xi} f(x)d\xi.$$

On aura par exemple

$$\mathcal{F}_2(f(t)e^{iat})(\xi) = \mathcal{F}_2(f)\left(\xi - \frac{a}{2\pi}\right)$$

2.5. **Produit de convolution.** On appelle produit de convolution des fonctions f et g, la fonction

$$h = f * g$$

définie par

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

sous réserve de convergence de l'intégrale introduite.

Grce au changement de variable $u = t - u$, on montre que

$$f * g = g * f.$$

Théorème 3. *Effet de la transformée de Fourier sur le produit de convolution de fonctions Soit f et g deux fonctions et $f * g$ leur produit de convolution*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

3. Formules de réciprocité de Fourier

Sous certaines conditions, il est possible d'inverser la transformée de Fourier, c'est à dire de retrouver f en connaissant $\widehat{f}$.

Théorème 4. *Si f et $\widehat{f}$ sont toutes deux dans $L^1(\mathbb{R})$, on pose*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \widehat{f}(t) dt$$

Alors g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f = g$ presque partout.

Donc deux fonctions intégrables qui ont même transformée de Fourier sont égales presque partout. Dire que deux fonctions f et g de $L^1(\mathbb{R})$ sont égales presque partout signifie que l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable (de mesure nulle pour la longueur dans $\mathbb{R}$). Par exemple un point, une famille finie de points sont des ensembles négligeables. Si f et g sont différente sur un ensemble de mesure nulle, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f-g)(x)| dx = 0.$$

Remarques.

(1) Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier existe. Mais celle-ci n'est pas forcément intégrable. Le théorème de réciprocité ci-dessus n'a de sens que lorsque f et $\widehat{f}$ admettent des transformées de Fourier. On peut donc supposer en particulier que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) Supposons que f soit continue par morceaux avec des points de discontinuité de première espèce et que la transformée de Fourier de f existe:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} dx.$$

Dans ce cas, le théorème ci-dessus s'écrit: si la transformée de Fourier de $\widehat{f}$ existe, alors

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{itx} dt$$

Lorsque f et $\mathcal{F}(f)$ sont absolument intégrables sur $]-\infty, +\infty[$ et lorsque f est continue on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(t) e^{ixt} dt.$$

(3) Autre cas particulier intéressant: Si f est deux fois dérivable avec la dérivée et la dérivée seconde continues, si de plus f, f', f'' sont intégrables, alors l'inversion de la transformée de Fourier est possible et on a
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$
Cette formule signifie aussi que
$$\widehat{\widehat{f}}\,(-t) = 2\pi f(t)$$

4. Théorème de Plancherel: généralisation de la transformation de Fourier à des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas forcément le meilleur cadre pour définir la transformée de Fourier, car $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par la transformée de Fourier. On préfère souvent l'étudier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Mais on ne peut pas en général définir la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ (fonction dont $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt$ CV) par la formule usuelle car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ n'a pas de raison d'exister pour une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. On peut néanmoins définir la **transformée de Fourier-Plancherel de** f par le théorème suivant :

Théorème 5. *Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Pour $A > 0$, on définit :*
$$\varphi_A(f)(x) = \int_{-A}^{A} f(t)e^{-ixt}dt$$
Alors, $\varphi_A(f)$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ quand A tend vers l'infini vers une fonction $F(f)$ qu'on appelle **transformée de Fourier-Plancherel de** f.

En outre, si f est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $F(f)$ concide avec la transformée de Fourier usuelle de f.

5. Formules de Parseval et de Plancherel

Les fonctions couramment utilisées dans la transformation de Fourier sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ mais aussi de carré intégrable, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt$ est convergente (le module est inutile si f est réelle). On a alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(x)|^2dx$$
(formule de Parseval)

Plus généralement on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\cdot\overline{\mathcal{F}(g)}(x)dx$$
(formule de Plancherel)

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g}(t)dt$ définit sur l'espace des fonctions transformables au sens de Fourier un produit scalaire hermitien qui à un coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près, se conserve dans la transformation de Fourier

6. Applications

Les propriétés de la **transformée de Fourier** notamment celles concernant la dérivation de f et la translation sont à l'origine d'**applications de la transformation de Fourier** à des **équations fonctionnelles, c'est-à-dire o l'inconnue est un fonction**; en particulier, **équations aux dérivées partielles**, par exemple le **problème des cordes vibrantes**.

Pour les équations différentielles, on utilise plus couramment la **transformation de Laplace**, valable dans des hypothèses plus larges.

La transformation de Fourier est utilisée en physique et en théorie des signaux

On a vu qu'il est possible de choisir une définition alternative pour la transformation de Fourier. Par exemple

$$\mathcal{F}_2(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega t} f(t)dt$$

avec f un signal donné en fonction du temps t en secondes et ω la fréquence donnée en Herz. La représentation temporelle peut être suffisante dans les cas où la forme du signal et la nature du traitement restent simples. Dans la réalité, les signaux nont pas toujours une forme simple soit en raison de la nature de linformation qu'ils portent, soit en raison du traitement quils doivent subir. Lunique représentation du signal en fonction du temps savère insuffisante : elle ne permet plus dinterpréter correctement l'information. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile. La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet d'établir une dualité entre deux représentations différentes d'un signal mais complémentaires au niveau de l'interprétation des résultats. Elle effectue le passage du domaine temporel au domaine spectral (fréquentiel). Son résultat est appelé spectre dun signal.

Exercices

Exercice 1 Démontrer, grâce au calcul direct intégral, les transformées de Fourier suivantes:

(1) $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

(2) pour $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq L \\ 0 \text{ si } |x| > L \end{cases}$ on a $\mathcal{F}(f)(\omega) = 2\ \dfrac{\sin(L\omega)}{\omega}$

où a et L sont des réels strictement positifs.

Exercice 2 Soit k une constante fixée, f une fonction donnée de $L^1(\mathbb{R})$. On cherche les fonctions $y \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$y(t) - k[y(t+1) - y(t-1)] = f(t).$$

(1) Transformer cette équation par la transformation de Fourier
(2) En déduire la transformée $\widehat{y}$
(3) En déduire l'expression de y sous forme d'une intégrale.
(4) Quelle condition doit vérifier k?

Exercice 3 On va utiliser les transformées de Fourier pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt,$$

où α est un réel positif.

(1) Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-\alpha|t|}$
(2) Montrer que la fonction f vérifie la formule d'inversion
(3) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt.$$

Exercice 4 Trouver la transformée de Fourier de la fonction $te^{-a|t|}$

Exercice 5 Résoudre à l'aide des transformation de Fourier l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec un second membre f supposée dans $L^1(\mathbb{R})$ et $w \in \mathbb{R}^*$:

$$-\frac{1}{w^2}g'' + g = f$$

Exercice 6

(1) Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier, $a \in \mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g définie par $g(t) = f(t)cos(at)$.
(2) Soit f une fonction paire admetteant une transformée de Fourier. Montrer que

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)cos\omega tdt.$$

(3) Soit f une fonction impaire admettant une transformée de Fourier. Montrer que

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)sin\omega tdt.$$

Exercice 7 Soit $a > 0$. Calculer la transform'ee de Fourier de la fonction f dfinie par $f(t) = e^{-at^2}$ On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Exercice 8 Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$ à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier et du tableau.

Exercice 9

(1) Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction h définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ (où $\mathcal{U}$ est la fonction de Heaviside c'est-à-dire que $\mathcal{U}(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon).
(2) En déduirer les transformées de Fourier des fonctions f et g définies par $f(t) = e^{-a|t|}$ et $g(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t) - e^{at}\mathcal{U}(t)$.
(3) En déduire la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(\omega t)}{t^2 + \alpha^2} dt \quad \textbf{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tsin(\omega t)}{t^2 + \alpha^2} dt.$$

Exercice 10 Un exemple de alcul du produit de convolution de fonctions grâce à la transformation de Fourier. Calculer $f * g$ avec $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ et $g(t) = \frac{1}{t^2+b^2}$ avec $a, b > 0$.

Exercice 11 Utilisation de la formule de Parseval.

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{sin^4 t}{t^4} dt$.

Corrigé des exercices

Exercice 1 Démontrer, grâce au calcul direct intégral, les transformées de Fourier suivantes:

(1) $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_{t\to-\infty}^{t=0}.\end{aligned}$$

Or $e^{(a-i\omega)t} = e^{at}e^{-i\omega t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|e^{-i\omega t}| < 1$ et $e^{at} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. De même $e^{-(a+i\omega)t} = e^{-at}e^{-i\omega t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|e^{-i\omega t}| < 1$ et $e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi

$$\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \tfrac{1}{a-i\omega} + \tfrac{1}{a+i\omega} = \tfrac{a+i\omega+a-i\omega}{(a+i\omega(a-i\omega))} = \tfrac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

(2) pour $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \le L \\ 0 \text{ si } |x| > L \end{cases}$ on a $\mathcal{F}(f)(\omega) = 2\,\dfrac{\sin(L\omega)}{\omega}$

où a et L sont des réels strictement positifs. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-L}^{L} e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-L}^{L} cos(\omega t)dt + i\int_{-L}^{L} sin(\omega t)dt = 2\int_{0}^{L} cos(\omega t)dt \\ &\text{(}cos\text{ est paire et }sin\text{ est impaire)} \\ &= 2\left[\frac{-sin(\omega t)}{\omega}\right]_{0}^{t=L} = 2\,\frac{sin(\omega L)}{\omega}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient k une constante fixée et f une fonction donnée de $L^1(\mathbb{R})$. On cherche les fonctions $y \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$y(t) - k[y(t+1) - y(t-1)] = f(t).$$

(1) Transformer cette équation par la transformation de Fourier

Compte tenue de la linéarité et de la formule de transformée d'une fonction translatée, on a

$$\widehat{y}(x) - k[e^{-ix}\widehat{y}(x) + e^{ix}\widehat{y(x)}] = \widehat{f}(x)$$

(2) En déduire la transformée $\widehat{y}$

$$\widehat{y}(x) = \frac{\widehat{f}(x)}{1-2k\cos x}$$

(3) En déduire l'expression de y sous forme d'une intégrale. D'après la formule d'inversion, on a

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(x)}{1-2k\cos x}e^{itx}dx$$

(4) Quelle condition doit vérifier k? Le dénominateur doit être différent de 0. Pour $k=0$ c'est le cas. Pour $k \neq 0$ on a $1-2k\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2k}$. Si $\frac{1}{2k} > 1$ il n'y aura pas de valeur de x annulant le dénominateur. Cela correspond à $k > 0$ et $k < \frac{1}{2}$. De même si $\frac{1}{2k} < -1$ il n'y aura pas de valeur de x telle que le dénominateur s'annule. Cela correspond à $k < 0$ et $k > \frac{-1}{2}$. Réciproquement si $k \le \frac{-1}{2}$ ou $k \ge \frac{1}{2}$, le

dénominateur s'annule pour certaines valeurs de $x \in \mathbb{R}$ et l'intégrale n'est pas définie. Ainsi la condition que doit vérifier k est

$$k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

La fonction y sera alors définie par exemple si $\frac{\widehat{f}(x)}{1-2k\cos x}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Trouver la transformée de Fourier de la fonction $te^{-a|t|}$ avec $a > 0$.

On sait que

$$\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

De plus

$$\mathcal{F}(tf(t))(\omega) = i\widehat{f}\,'(\omega)$$

d'où

$$\mathcal{F}(te^{-a|t|})(\omega) = i \times 2a \times \frac{-2\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{-4ia\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$$

Exercice 5 Résoudre à l'aide des transformation de Fourier l'équation différentielle linéaire du second ordre, avec un second membre f supposée dans $L^1(R)$ et $w \in \mathbb{R}^*$:

$$-\frac{1}{w^2}g'' + g = f$$

On applique formellement la transformée de Fourier qui est linéaire:

$$-\frac{1}{w^2}\widehat{g''}(u) + \widehat{g}(u) = \widehat{f}(u)$$

d'où, en utilisant la propriété de dérivation (en fréquence)

$$-\frac{1}{w^2}(iu)^2\widehat{g}(u) + \widehat{g}(u) = \left(\frac{u^2}{w^2}+1\right)\widehat{g}(u) = \widehat{f}(u)$$

ou encore

$$\widehat{g}(u) = \frac{1}{1+\frac{u^2}{w^2}}\widehat{f}(u) = \frac{w^2}{w^2+u^2}\widehat{f}(u)$$

On va faire apparatre $\frac{w^2}{w^2+u^2}$ comme la transformée de Fourier d'une fonction h:

$$\frac{w^2}{w^2+u^2} = \frac{|w|^2}{|w|^2+u^2} = \frac{|w|}{2}\frac{2|w|}{|w|^2+u^2}$$

et on a

$$\widehat{h}(u) = \frac{|w|}{2}\frac{2|w|}{|w|^2+u^2} \quad \text{avec} \quad h(t) = \frac{|w|}{2}e^{-|w|\,|t|}.$$

Ainsi

$$\widehat{g}(u) = \widehat{h}(u)\widehat{f}(u) = \widehat{h * f}(u).$$

Finalement

$$g(t) = \frac{|w|}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|w|\,|t-u|}f(u)du$$

est solution de l'équation différentielle.

Exercice 3. On va utiliser les transformées de Fourier pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt,$$

où α est un réel positif.

(1) Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\alpha|x|}$
On a $\widehat{f}(t) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$

(2) Montrer que la fonction f vérifie la formule d'inversion.
Montrons que la fonction $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|\widehat{f}(t)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}$. Or $\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2} \sim_{+\infty} 2\alpha\frac{1}{t^2}$ et puisque $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}$ est CV (intégrale de Riemann CV car $2 > 1$). On a le même résultat pour $-\infty$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(t)|dt \text{ est convergente}$$

et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Comme de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\widehat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}dt = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{\alpha^2+t^2}dt$$

(3) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt.$$

On a $e^{ixt} = cos(xt) + isin(xt)$. Comme sin est une fonction impaire ($\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$) et la fonction g définie par $g(t) = \frac{1}{\alpha^2+t^2}$ est paire, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt)\frac{1}{\alpha^2+t^2}dt = 0.$$

Comme cos est une fonction paire ($\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$) et la fonction g paire, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\frac{1}{\alpha^2+t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} \cos(xt)\frac{1}{\alpha^2+t^2}dt.$$

On a donc

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt$$

et

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{\alpha^2+t^2}dt = e^{-\alpha|x|}\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Exercice 6

(1) Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier, $a \in \mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction g définie par $g(t) = f(t)cos(at)$.

(2) Soit f une fonction paire admetteant une transformée de Fourier. Montrer que

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)cos\omega t dt.$$

(3) Soit f une fonction impaire admetteant une transformée de Fourier. Montrer que

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) sin\omega t dt.$$

Exercice 7 Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = e^{-at^2}$. On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

La fonction f est paire puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-t) = e^{-a(-t)^2} = e^{-at^2}$. On a vu (exercice 6) que si g est une fonction paire

$$\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt$$

donc

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at^2} cos(\omega t) dt.$$

On ne peut pas calculer facilement cette intégrale mais on va pouvoir trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction $\widehat{f}$. En la résolvant, nous pourrons trouver $\widehat{f}$. Mais pour cela on doit pouvoir calculer la dérivée de $\widehat{f}$ qui pose le problème d'inversion de la dérivée et de l'intégrale (et demande donc une convergence uniforme de la fonction de deux variables) i.e on veut vérifier que l'on peut utiliser le théorème de dérivation pour les intégrales généralisées à paramètre. On a $\dfrac{\partial e^{-at^2} cos(\omega t)}{\partial \omega} = -te^{-at^2} sin(\omega t)$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0+\infty[$, on a $|-te^{-at^2} sin(\omega t)| \leq te^{-at^2}$. Or $t^3 e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ puisque $a > 0$ et $at^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et pour tout $b > 0$, $t^b e^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $(at^2)^b e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc aussi $t^3 e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi pour t assez grand $t^3 e^{-at^2} < 1$ donc il existe $M > 0$ tel que pour $t > M$ on ait $t^3 e^{-at^2} < 1$ (soit encore $te^{-at^2} < \frac{1}{t^2}$). D'après le théorème de Riemann en $+\infty$, $\int_M^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc par comparaison (on a des fonctions positives) $\int_M^{+\infty} te^{-at^2} dt$ converge. Ainsi par comparaison $\int_M^{+\infty} |-te^{-at^2} sin(\omega t)| dt$ converge et également $\int_0^{+\infty} |-te^{-at^2} sin(\omega t)| dt$. D'après le théorème de dérivation,

$$(\widehat{g})'(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} -te^{-at^2} sin(\omega t) dt = \int_0^{+\infty} -2te^{-at^2} sin(\omega t) dt.$$

Faisons une intégration par parties en posant $u(t) = sin(wt)$ d'où $u'(t) = \omega cos(\omega t)$ et $v'(t) = -2te^{-at^2}$ d'où $v(t) = \frac{1}{a} e^{-at^2}$:

$$(\widehat{g})'(\omega) = \frac{1}{a} [e^{-at^2} sin(\omega t)]_{t=0}^{t\to+\infty} - \frac{\omega}{a} \int_0^{+\infty} e^{-at^2} cos(\omega t) dt = 0 - 0 - \frac{\omega}{2a} \widehat{f}(\omega)$$

Si on note $g = \widehat{f}$ et qu'on écrit les fonctions en la variable t on obtient l'équation différentielle

$$g'(t) = -\frac{t}{2a} g(t)$$

d'où $\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{t}{2a}$ (pour $g \neq 0$) et $ln|g(t)| = -\frac{t^2}{4a} + c$. Ainsi $g(t) = e^{-\frac{t^2}{4a}+c} = e^{-\frac{t^2}{4a}} e^c = Ke^{-\frac{t^2}{4a}}$ en posant $e^c = K$. On calcule K:

$$K = g(0) = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i0t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} dt$$

puisque $a > 0$. En posant $u = t\sqrt{a}$ on obtient

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u)^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

d'où $\widehat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\dfrac{t^2}{4a}}$ ou encore

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\dfrac{\omega^2}{4a}}.$$

Exercice 8

Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier et du tableau.

On sait d'après le tableau que que $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ donc on a la fonction f demandée à droite du tableau, à une constante près. Si le théorème d'inversion s'applique à la fonction g définie par $g(t) = e^{-a|t|}$ on aura

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ou encore

$$g(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(t).$$

ce qui peut s'écrire $\widehat{g}(t) = 2\pi g(-t)$ ce qui permettra de calculer $\mathcal{F}(a^2 + t^2)$ simplement.

Si $g, \widehat{g} \in Ł^1(\mathbb{R})$ et f continue sur $\mathbb{R}$ le théorème s'applique et on a

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) e^{i\omega} t d\omega$$

On a $g(t) = e^{-a|t|}$ et g est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g qui est positive et paire appartient bien à $L^1(\mathbb{R})$ puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{a|t|}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|t|} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{a|t|} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ et puisque pour t assez grand $t^2 e^{at} < 1 \Leftrightarrow e^{at} < \frac{1}{t^2}$ et par comparaison avec la fonction de Riemann généralisée en $+\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{a|t|}| dt$ converge. Puisque $\int_0^{+\infty} |e^{-at}| dt = \int_{-\infty}^{0} |e^{at}| dt$ converge donc $g \in L^1(\mathbb{R})$. De plus $\widehat{g}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ qui est positive est aussi dans $L^1(R$ par comparaison avec la fonction de Riemann $\frac{1}{\omega^2}$.

En appliquant le théorème d'inversion, on a $\widehat{g}(\omega) = 2\pi g(-\omega)$ c'est à dire, $\mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2+t^2}\right)(\omega) = 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$ d'où

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

Remarque: on a d'autres hypothèses pour lesquelles on a la formule d'inversion.

Ainsi si $g, g', g"$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et toutes les trois dans $L^1(\mathbb{R})$ on a aussi

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

.

Si on prend les conditions g dans $L^1(\mathbb{R})$ et C^1 par morceaux (g dérivable et de dérivée continue), on a la formule suivante

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

où

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} h(t)dt$$

est la valeur principale de Cauchy de la fonction h.

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ converge, on a $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} h(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$. Ainsi si g dans $L^1(\mathbb{R})$ (donc $\widehat{g}$ existe) et C^1 par morceaux et en plus $\widehat{g}$ admet une transformée de Fourier (alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t)e^{-i\omega t}dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ et aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$) on retrouve la formule

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Exercice 9

(1) Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction h définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $h(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$ (où $\mathcal{U}$ est la fonction de Heaviside c'est-à-dire que $\mathcal{U}(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon).

La transformée de Fourier de h est

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\mathcal{U}(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t}dt = \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$$

(voir les exercices précédents pour la justification).

(2) En déduirer les transformées de Fourier des fonctions f et g définies par $f(t) = e^{-a|t|}$ et $g(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t) - e^{at}\mathcal{U}(t)$. La transformation de Fourier est linéaire donc

$$\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(h(t))(\omega) - \mathcal{F}(h(-t))(\omega)$$

Remarquons que pour une fonction k on a

$$\mathcal{F}\left(k(-t)\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(-t)e^{-i\omega t}dt = int_{-\infty}^{+\infty}k(u)e^{i\omega u}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u)e^{-i(-\omega)u}dt = \mathcal{F}(k(t))(-\omega).$$

Alors

$$\widehat{g}(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} - \frac{1}{a-i\omega} = \frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}.$$

On a déjà calculé $\mathcal{F}(f)$ dans des exercices précédents. Voici une autre façon de calculer la transformée de Fourier de f: On remarque que $f(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t) + e^{at}\mathcal{U}(-t)$. En effet $\mathcal{U}(t) = -1$ pour $t \leq 0$ et 0 sinon. En utilisant la linéarité de la transformation de Fourier, on a

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(h(t))(\omega) + \mathcal{F}(h(-t))(\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

(3) En déduire la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(\omega t)}{t^2+\alpha^2}dt \quad \textbf{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tsin(\omega t)}{t^2+\alpha^2}dt.$$

On a déjà utilisé l'inversion de la transformation de Fourier de f pour calculer la première intégrale dans l'exercice 4. Pour calculer la deuxième intégrale, on utilise la transformée de Fourier inverse avec la fonction g (on suppose que c'est possible). Alors

$$\begin{array}{ll} g(\omega) & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2it}{a^2+t^2}e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-it}{a^2+t^2}(cos(\omega t)+isin(\omega t))dt \\ & = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{tsin(\omega t)}{a^2+t^2}dt \end{array}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{tsin(\omega t)}{a^2+t^2}dt = \pi g(\omega)$.

Exercice 10 Un exemple de calcul du produit de convolution de fonctions grâce à la transformation de Fourier. Calculer $f*g$ avec $f(t)=\frac{1}{t^2+a^2}$ et $g(t)=\frac{1}{t^2+b^2}$ avec $a,b>0$. Comme $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ on obtient en appliquant la transformée de Fourier à $f*g$:

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$$

De plus, on a vu (exercices précédents) que pour $a>0$ on a $\mathcal{F}(\frac{1}{t^2+a^2})(\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$ donc

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}\frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}=\frac{\pi^2}{ab}e^{-(a+b)|\omega|}$$

On a alors presque la transformée de Fourier d'une fonction connue:

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\frac{\pi(a+b)}{ab}\frac{\pi}{a+b}e^{-(a+b)|\omega|}=\frac{\pi(a+b)}{ab}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+(a+b)^2}\right)(\omega)$$

De plus la transformation de Fourier est linéaire donc

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\mathcal{F}\left(\frac{\pi(a+b)}{ab}\frac{1}{t^2+(a+b)^2}\right)(\omega).$$

On en conclut que

$$(f*g)(t)=\frac{\pi(a+b)}{ab}\frac{1}{t^2+(a+b)^2}.$$

Exercice 11 Utilisation de la formule de Parseval.

Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{sin^4 t}{t^4}dt$. On voit ici que $\frac{sin^4 t}{t^4}$ correspond à peu de chose près au carré de la transformée de Fourier de la fonction triangle $q_1(t)=1-|t|$ pour $|t|\leq 1$ d'une fonction (exprimée en t et non en ω). On pense alors à utiliser la formule de Parseval qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1(t))^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\widehat{q_1}(\omega))^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2}\right)^2d\omega$$

En posant $u=\frac{\omega}{2}$ on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1(t))^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4sin^2u}{(2u)^2}\right)^2 2du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin^4u}{u^4}du=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{sin^4u}{u^4}du$$

Ainsi

$$\begin{array}{ll} \int_0^{+\infty}\frac{sin^4u}{u^4}du & = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(q_1(t))^2dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(q_1(t))^2dt=\pi\int_0^1(q_1(t))^2dt=\pi\int_0^1(1-t)^2dt \\ & =\pi\int_0^1(1-2t+t^2)dt=\pi\left[t-t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1}=\pi(1-1+\frac{1}{3})=\frac{\pi}{3}. \end{array}$$