CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques: PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 1

Rappels sur les ensembles

1. Ensembles. Eléments d'un ensemble

1.1. **Ensembles. Appartenance.** Nous considèrrerons les ensembles comme des collections d'objets appelés les éléments de cet ensemble. Les ensembles de nombres les plus classiques sont $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Ces ensembles sont tous infinis, c'est-à-dire contiennent une infinité d'éléments. Un ensemble qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments est dit fini. Lorsque ce nombre fini n'est pas trop grand, on représente parfois cet ensemble en écrivant tous les éléments qu'il contient de la façon suivante:

$$\{a, b, c\}$$

il s'agit ici d'un ensemble contenant (seulement) les trois lettres a, b, c.

Soit E un ensemble. Si a est un élément de E, on écrit

$$a \in E$$

qui se lit a appartient à E.

Définition 1. *Deux ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si $a \in E$ alors $a \in F$ et si $b \in F$ alors $b \in E$.*

1.2. **Sous-ensemble. Inclusion.**

Définition 2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F. Dans ce cas on écrit*

$$E \subset F$$

qui se lit E est inclus dans F.

Dans ce cas, on dit que E est un sous-ensemble de F. Par exemple, on a

$$\subset \mathbb{Z}$$

ou bien

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Si A désigne l'ensemble des nombres pairs, alors

$$A \subset \mathbb{N}.$$

Un des problèmes qui nous intéressera rapidement est de déterminer tous les sous-ensembles d'un ensemble fini donné. Pour cela, nous avons besoin d'un ensemble particulier, appelé l'ensemble vide.

Définition 3. *On appelle ensemble vide, l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.*

De par sa définition, l'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

2. Ensemble des parties d'un ensemble

2.1. **Définition.**

Définition 4. *Soit E un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de E, l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de E.*

Exemples

(1) Soit E l'ensemble à deux éléments : $E = \{a, b\}$. Alors E admet comme sous-ensembles $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ et E lui même. En effet, de par la définition de l'inclusion, on a toujours $E \subset E$. Ainsi
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$
Si E contient 2 éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 4 éléments.

(2) Soit E l'ensemble à trois éléments : $E = \{a, b, c\}$. Alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$
Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments.

2.2. **Lien entre appartenance et inclusion.** Soit E un ensemble. Si A est un sous-ensemble de E, on a alors les relations

$$A \subset E$$

et

$$A \in \mathcal{P}(E).$$

Il est clair que ces deux relations veulent dire la même chose.

3. Opérations sur les ensembles

3.1. **Réunion de deux ensembles.**

Définition 5. *Soient E et F deux ensembles. On appelle réunion de E et F, l'ensemble noté $E \bigcup F$ et dont les éléments appartiennent à E ou à F.*

La notation $E \bigcup F$ se lit aussi E union F.. Notons qu'un élément de $E \bigcup F$ peut appartenir à E et à F. Cette opération réunion peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un enesemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, c'est-à-dire si $A, B \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \bigcup B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcup B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

3.2. **Intersection de deux ensembles.**

Définition 6. *Soient E et F deux ensembles. On appelle intersection de E et F, l'ensemble noté $E \bigcap F$ et dont les éléments appartiennent à E et à F.*

La notation $E \bigcap F$ se lit aussi E inter F. Cette opération intersection peut être considérée comme une opération dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un enesemble donné E. En effet si A et B sont des sous-ensembles de E, alors $A \bigcap B$ est encore un sous-ensemble de E. Il est défini par

$$A \bigcap B = \{x \in E, \text{ tels que } x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

On vérifie sans peine les propriétes suivantes: Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors

(1) $A \bigcup B = B \bigcup A$. $A \bigcap B = B \bigcap A$.
(2) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
(3) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
(4) $A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A$.

Définition 7. *Deux ensembles E et F sont dits disjoints si*

$$E \bigcap F = \emptyset.$$

3.3. **Complémentaire d'un sous-ensemble.**

Définition 8. *Soit A un sous-ensemble d'un ensemble donné E. On appelle complémentaire de A dans E le sous-ensemble de E noté $\complement_E A$ dont les éléments sont ceux de E qui n'appartiennent pas à A.*

Ainsi

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tels que } x \notin A\}$$

où $\notin$ signifie "n'appartient pas". On a donc les propriétés suivantes:

(1) $A \bigcap \complement_E A = \emptyset$.

(2) $A \bigcup \complement_E A = E$.

On dit, dans ce cas que les sous-ensembles A et $\complement_E A$ forment une partition de E. On généralisera, dans le paragraphe suivant, cette notion.

Proposition 1. Lois de Morgan. *Soient A et B deux sous-ensembles de E Alors*

(1) $\complement_E(A \bigcup B) = \complement_E A \bigcap \complement_E B$.

(2) $\complement_E(A \bigcap B) = \complement_E A \bigcup \complement_E B$.

On montrera ces relations en exercice.

3.4. **Généralisation.** Soit I une partie de N. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Alors

(1) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tels qu'il existe } i \in I \text{ avec } x \in A_i\}$.

(2) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tels pour tout } i \in I \text{ on a } x \in A_i\}$.

4. Partition d'un ensemble

Définition 9. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit qu'elle forme une partition de E si*

(1) $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$

(2) $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *dès que* $i \neq j \in I$.

Nous avons vu, comme exemple, que la famille $(A, \complement_E A)$ formait une partition de E.

EXERCICES

Exercice 1. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer que si

$$A \bigcup C \subset A \bigcup B \quad \text{et } A \bigcap C \subset A \bigcap B$$

alors

$$C \subset B.$$

Exercice 2. Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer

(1) $A \subset B$ si et seulement si $A \bigcup B = B$
(2) $A \subset B$ si et seulement si $\complement_E A \bigcup B = E$

Exercice 3. Démontrer les lois de Morgan.

Exercice 4. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5. Soit E un ensemble fini de n éléments. Déterminer le nombre d'élément de $\mathcal{P}(E)$.