

Formation Ingénieur Informatique  
Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 6

---

# Variables aléatoires continues

---

## 1. DÉFINITION ET EXEMPLES

### 1.1. Rappel : Définition d'une variable aléatoire.

Dans le chapitre précédent, nous avons donné la définition générale d'une variable aléatoire sur un espace probabilité, en s'intéressant surtout au cas fini. Nous allons étendre cette étude au cas où l'espace probabilité est infini, par exemple  $\mathbb{R}$ , car un des résultats fondamentaux relatifs aux variables aléatoires finies mais avec des ordres de grandeurs difficiles à maîtriser transfèrent le problème au cas infini où des résultats d'analyse réelle permettent de résoudre notre problème.

**Définition 1.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilitisé. On appelle variable aléatoire sur cet espace toute fonction

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}.$$

Bien prendre garde à la notation  $X^{-1}(A)$  où  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Il s'agit de l'image inverse, c'est-à-dire, pour une partie  $A$  donnée dans l'espace d'arrivée, on cherche tous les éléments dans l'ensemble de départ qui sont envoyés dans  $A$  par l'application  $X$ . Par exemple, si  $A$  est l'intervalle fermé  $[a, b]$ , alors

$$X^{-1}[a, b] = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\}.$$

Bien entendu, lorsque  $\Omega$  est fini, on retrouve la définition du chapitre précédent car la condition

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$$

est toujours réalisée. Dans ce cas, toute application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

est une variable aléatoire sur  $\Omega$ .

**1.2. Différences avec le cas finis ou discret.** La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue  $X$ , la probabilité que  $X$  prenne une valeur bien précise  $x$  est nulle :

$$P(X = x) = 0.$$

Ceci peut s'expliquer en disant qu'il y a une infinité de valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul. Prenons par exemple le cas où la variable aléatoire  $X$  est la taille d'un individu. On peut considérer cette variable comme continue. Soit  $x = 1,77453$ . Il est clair que  $P(X = 1,77453) = 0$ . Il n'est donc pas possible de définir la loi de  $X$  par la donnée des probabilités des événements élémentaires, comme dans le cas fini.

## 2. LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE. FONCTION DE RÉPARTITION. DENSITÉ

### 2.1. Définition.

**Définition 2.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espace probabilisé et soit  $X$  une variable aléatoire sur cet espace. La loi de probabilité de  $X$  est la probabilité sur  $\mathbb{R}$  définie par

$$P_X(]-\infty, x]) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}).$$

En particulier on a :

$$P_X(]a, b]) = P(\{\omega \in \Omega, a < X(\omega) \leq b\})$$

ou bien

$$P_X(\{x\}) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}).$$

On vérifie sans peine que  $P_X$  est bien une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$  muni de la tribu des boréliens.

**2.2. Fonction de répartition.** Il est clair que la probabilité de l'événement  $P(X \leq x)$  dépend de  $x$ . On définit ainsi une fonction,  $F_X(x)$  de la variable réelle  $x$ , appelée fonction de répartition de la variable aléatoire  $x$ .

Rappelons la convention :

$$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}.$$

**Définition 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction numérique

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

On peut voir facilement que cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$
- (2) Pour tout  $x$ ,  $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- (3)  $F_X$  est une fonction croissante.
- (4)  $F_X(+\infty) = 1$ ,  $F_X(-\infty) = 0$ .

**Proposition 1.**

$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

*Démonstration.* En effet, les évènements  $\{X > x\}$  et  $\{X \leq x\}$  sont disjoints et leur réunion est  $\Omega$ . On en déduit

$$P(X > x) + P(X \leq x) = 1$$

d'où la proposition.

**2.3. Probabilité d'un évènement élémentaire.** Revenons à l'exemple précédent dans lequel on mentionnait que la probabilité d'un évènement élémentaire pour une variable continue était nul. Ceci nécessite un peu d'explication. On dit qu'une fonction d'une variable réelle  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en un point  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Ceci n'est pas toujours vérifiée, du moins dans un cadre général, pour les fonctions de répartition. Elles vérifient néanmoins la propriété

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \geq x_0} F(x) = F(x_0).$$

On dit qu'elle sont continues à droite. Si tel est le cas, on a alors, en général

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \leq x_0} F(x) \neq F(x_0)$$

et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \leq x_0} F(x) = F(x_0^-).$$

On a alors

$$P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-).$$

Par contre,

**Proposition 2.** *Supposons que la fonction de répartition  $F_X(x)$  de  $X$  soit continue en tout point. Alors*

$$P(X = x) = 0.$$

**2.4. Fonction de densité.** On suppose maintenant que la fonction  $F_X(x)$  est continue et dérivable.

**Proposition 3.** *Supposons que la fonction de répartition  $F_X(x)$  de  $X$  soit dérivable en tout point. On appelle fonction de densité de  $X$  la fonction dérivée de  $F_X$  :*

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Comme  $F_X(x)$  est une fonction croissante, sa dérivée  $f_X(x)$  est positive. Rappelons que si  $f(x)$  est la dérivée de la fonction  $F(x)$ , alors  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  et on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette intégrale représente l'aire de la partie du plan situé entre le segment  $[a, b]$  de l'axe des abscisses et la courbe  $f_X(x)$ . On en déduit

**Proposition 4.**

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour calculer en fonction de la densité les probabilités  $P(X \leq x)$  nous avons besoin de la notion d'intégrale généralisée :

**Définition 4.** *Soit  $f(x)$  une fonction continue. Alors*

$$(1) \int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

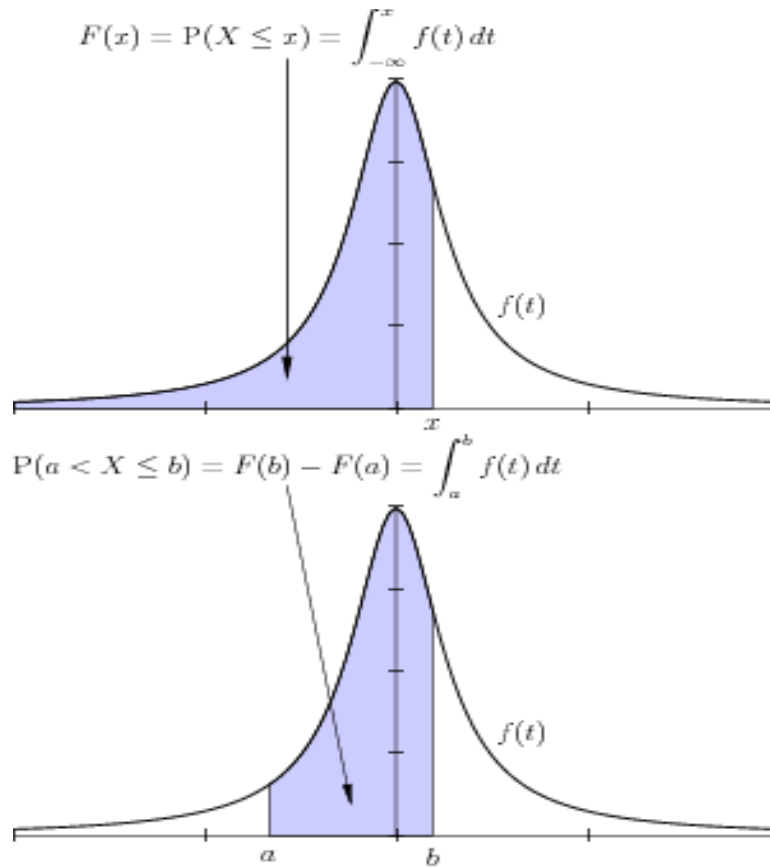
$$(2) \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(t)dt + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Bien entendu, certaines de ces limites peuvent ne pas exister. Mais cdc est un autre problème que nous n'aborderons pas ici.

**Proposition 5.**

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$



**2.5. Variables aléatoires égales presque partout.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Elles sont égales presque partout si l'ensemble

$$A = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

qui est dans  $\mathfrak{F}$  vérifie

$$P(A) = 0.$$

Nous savons que cela ne signifie pas que  $A$  soit un ensemble vide.

**Théorème 1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Si elles sont égales presque partout, alors  $P_X = P_Y$ .

La réciproque est fautive. Le fait que  $X$  et  $Y$  aient la même loi de probabilité ne signifie pas qu'elles soient égales ni même égales presque partout.

**Exemple.** On lance une pièce équilibrée et on considère le tirage pile ou face dont le résultat est 0 pour pile et 1 pour face.. On effectue trois lancers. Soit  $X$  la variable aléatoire correspondant

au nombre de fois où pile apparaît et soit  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où face apparaît. On a  $\Omega = \{0, 1\}^3$  et  $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Un résultat s'écrit  $\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  avec  $\alpha_i = 0$  ou  $1$ . Alors

$$P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Soit  $k$  un entier inférieur ou égal à 3. Notons par  $A_k$  le sous ensemble de  $\Omega$  défini par

$$A_k = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = k\}.$$

Alors

$$P_X(\{k\}) = P(\{\omega, X(\omega) = k\}) = P(A_k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

De même

$$P_Y(\{k\}) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Les variables  $X$  et  $Y$  ont la même loi de probabilité.

### 3. ESPÉRANCE. VARIANCE. ECART TYPE

**3.1. Espérance.** Nous n'abordons pas ici les problèmes d'existence des intégrales généralisées qui suivent.

**Définition 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité  $f_X(x)$ . L'espérance de  $X$  est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt.$$

On dit parfois que l'espérance de  $X$  est son moment d'ordre 1 et noté  $m_1(X)$ . Ceci permet de définir le moment d'ordre  $k$  :

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t) dt.$$

La variable aléatoire

$$Z = X - E(X) = X - m_1(X)$$

est appelée l'écart de  $X$ .

**3.2. Variance et Ecart-type.** Ces deux invariants de  $X$  sont, lorsqu'ils sont définis, donnés par :

**Définition 6.** Soit  $X$  une variable aléatoire continue de densité  $f_X(x)$ . La variance de  $X$  est

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t) dt = E(Z^2).$$

L'écart-type est défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

On retrouve dans ce cadre-ci les propriétés établies dans le cadre fini :

**Proposition 6.** Soient  $a, b$  des constantes.

$$(1) E(aX + b) = aE(X) + b,$$

$$(2) \sigma^2(aX + b) = a^2\sigma^2(X),$$

$$(3) E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

$$(4) \sigma^2(X) = m_2(X) - m_1(X).$$

Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes

$$(1) E(XY) = E(X)E(Y),$$

$$(2) \sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y).$$

#### 4. LA LOI NORMALE

**4.1. La loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .** La loi normale est une des lois de probabilité qui modélise de nombreux phénomènes naturels. Par exemple, le caractère taille de la population est distribué selon une loi normale. Elle est également utilisée pour donner une approximation fine pour des lois de probabilité de variables aléatoires finies, mais lorsque les paramètres sont des grands nombres. Par exemple, dans les lois de binomiales ou de Bernoulli, il est souvent très difficile de calculer numériquement les coefficients binomiaux lorsque les paramètres sont des grands nombres.

**Définition 7.** On appelle loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  de paramètres  $\mu, \mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma, \sigma \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ , la loi de probabilité dont la fonction de densité est

$$\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

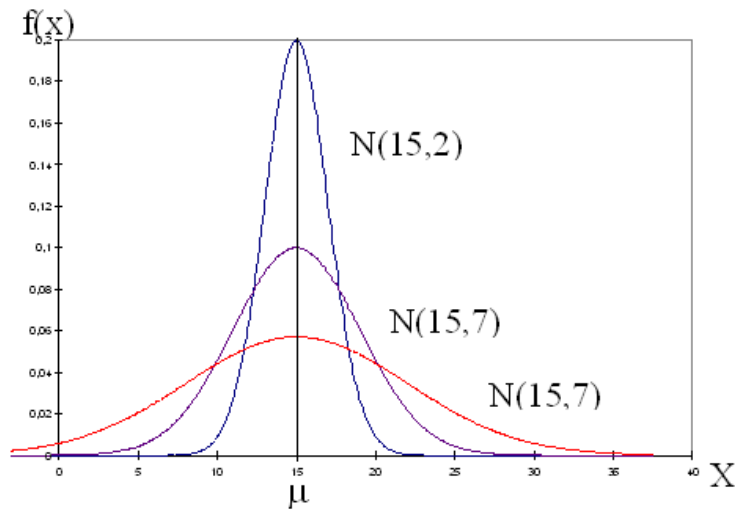
Cette loi est aussi appelée loi de Gauss ou de Laplace-Gauss.

Rappelons que si  $f_X(x)$  est la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue, alors elle vérifie

$$(1) f_X(x) \geq 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1.$$

On vérifie sans peine, comme l'exponentielle est toujours positive, que la fonction  $\varphi_{\mu, \sigma}(x)$  est positive. Nous pouvons tracer son graphe, en utilisant par exemple un logiciel graphique :



Par contre, on admettra, car le calcul nécessite des outils mathématiques sophistiqués :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = 1.$$

**Proposition 7.** Soit  $X$  une variable aléatoire normale, c'est-à-dire dont la fonction de densité suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Alors

- (1) Son espérance, ou valeur moyenne, est  $E(X) = \mu$ ,
- (2) Son écart-type est  $\sigma$ .

4.2. **La loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .** La loi de densité devient

$$\varphi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



et la fonction de répartition

$$\mathfrak{F}_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Si la variable aléatoire a pour loi de probabilité  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Posons

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Alors

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

La fonction  $\Phi$  est impaire et vérifie

$$\Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad \Phi(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

Les valeurs de  $\Phi$  sont données dans la table en fin de chapitre.

**4.3. Passage de la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  à la loi réduite.** Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Associons lui la variable aléatoire

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Il est clair que  $Y$  suit encore une loi normale. Son espérance est  $E(Y) = 0$  et son écart-type est  $\sigma(Y) = \frac{\sigma(X)}{\sigma} = 1$ . Ainsi  $Y$  suit la loi normale centrée.

**Proposition 8.** *Soit  $X$  une variable aléatoire normale, c'est-à-dire dont la fonction de densité suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Alors la variable aléatoire*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

*suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  centrée réduite.*

Ce résultat permet de calculer numériquement la probabilité  $P(a \leq X \leq b)$  pour une variable suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  donnée en transférant le calcul à la variable normale centrée associée et en utilisant la table des valeurs de  $\Phi$  ou une calculatrice numérique.

**Exemple.** Supposons que  $X$  suive la loi normale  $\mathcal{N}(1, 2)$ . Alors la variable

$$Y = \frac{X - 1}{2}$$

suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Calculons  $P(0 \leq X \leq 2)$ . On a  $X = 2Y + 1$ . Alors  $0 \leq X \leq 2$  implique  $0 \leq 2Y + 1 \leq 2$  soit

$$-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$P\left(-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Comme  $\phi$  est une fonction impaire  $\Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2}) = 2\Phi(\frac{1}{2}) = 2 \times 0,19 = 0,38$ . Ainsi

$$P(0 \leq X \leq 2) = 0,38.$$

**4.4. Approximation de la loi binomiale par la loi normale.** Rappelons, dans un premier temps, la formule de Stirling, qui est la base de notre théorie d'approximation.

**Formule de Stirling.** Lorsque  $n$  devient grand, alors

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

De cette formule se déduit l'approximation suivante : si  $npq \gg 1$ , alors

$$\binom{k}{n} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

La notation  $npq \gg 1$  signifie que le nombre  $npq$  est grand par rapport à 1, sans trop préciser ce que signifie grand !

**Proposition 9.** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète suivant la loi de Bernoulli. Alors  $P(X = k) = \binom{k}{n} p^k q^{n-k}$  et si  $npq \gg 1$  alors

$$P(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_{0,1}\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

**Exemple.** On lance 1000 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité de faire 500 pile ? Cette probabilité est

$$P(X = 500) = \binom{500}{1000} (0,5)^{500} (0,5)^{500}.$$

D'après le théorème d'approximation ci-dessus, comme  $npq = 1000 \times 0,5 \times 0,5 = 250 \gg 1$ ,

$$P(X = 500) \simeq \frac{1}{\sqrt{250}} \varphi_{0,1}\left(\frac{500 - 500}{\sqrt{250}}\right) = \frac{1}{\sqrt{250}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,0252.$$

## 5. FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion de fonction caractéristique d'une variable aléatoire finie ou discrète.

**Définition 8.** Soit  $X$  une variable aléatoire continue de fonction de densité  $f_X(x)$ . Sa fonction génératrice est la fonction

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f_X(x) dx.$$

Ce n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la fonction densité. Elle définit entièrement la loi de probabilité de la variable  $X$ . Ceci signifie que deux variables aléatoires ayant

même fonction caractéristique ont des fonctions de répartition égales ou égales presque partout. Si  $m_k$  sont les moments d'ordre  $k$  de  $X$ , on a alors,

$$\varphi_X(u) = 1 + ium_1 + \dots + \frac{(iu)^k}{k!}m_k + \dots$$

**Proposition 10.** *Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Sa fonction génératrice est la fonction*

$$\varphi_X(u) = e^{i\mu u - \frac{u^2\sigma^2}{2}}.$$

## 6. L'INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV

**6.1. L'inégalité.** Etant donnée une variable aléatoire  $X$ , son écart-type mesure la tendance qu'à  $X$  à s'écartier de sa moyenne. L'inégalité qui suit mesure l'erreur que l'on peut commettre en remplaçant  $X$  par sa moyenne.

**Théorème 2.** *Soit  $X$  une variable aléatoire sur l'espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  telle que  $E(X^2)$  soit finie. Si on note par  $\mu$  son espérance et par  $\sigma$  son écart-type, alors pour tout  $\varepsilon \geq 0$ ,*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Par exemple, la probabilité pour que le résultat d'une expérience  $X(\omega)$  diffère de  $\mu$  de plus de  $8\sigma$  est

$$P(|X - \mu| \geq 8\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(8\sigma)^2} = \frac{1}{64}.$$

**6.2. Calcul de  $\pi$  et l'aiguille de Buffon.** On lance une aiguille de longueur  $a$  sur un parquet dont les lattes sont de largeur  $b$ ,  $b \geq a$ . Buffon calcula la probabilité pour que l'aiguille coupe la rainure entre deux lattes et trouva

$$p = \frac{2a}{\pi b}.$$

Lorsque  $a = b$ , on trouve

$$p = \frac{2}{\pi}$$

d'où

$$\pi = 2p.$$

On peut espérer calculer, par une bonne estimation de  $p$ , une valeur approchée de  $\pi$ . Soit  $k$  le nombre de lancers. La loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  correspondant à cette expérience est la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(k, p)$ . Son espérance est donc

$$E(X) = kp$$

et l'écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{kpq}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ou bien

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$$

soit

$$P(|X - kp| \geq \epsilon\sigma) \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Supposons que  $\frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{100}$  soit  $\epsilon = 10$ . Soit  $x$  le nombre d'aiguilles ayant coupée la rainure. Le calcul approché  $\tilde{\pi}$  de  $\pi$  est alors  $\tilde{\pi} = 2k/x$ . Supposons que  $\tilde{\pi} = \pi \pm 10^{-3}$ . Alors

$$\frac{2k}{\pi + 10^{-3}} \leq x \leq \frac{2k}{\pi - 10^{-3}}.$$

Si  $|X - kp| = \epsilon\sigma$ , alors

$$k = \frac{\pi^2}{\epsilon} 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{kpq}$$

et donc

$$k = \frac{\pi^4}{\epsilon} 4 \cdot 10^{-6} pq$$

ce qui donne à peu près  $k = 560000000$ .

## EXERCICES

*Exercice 1.* Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de probabilité  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Quelle est la loi de la variable  $Y = aX + b$  ?

*Exercice 2.* Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de probabilité  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Calculer

- (1)  $P_1 = P(|X - \mu| < \sigma)$ ,
- (2)  $P_2 = P(|X - \mu| < 2\sigma)$ .

*Exercice 3.* Une variable aléatoire  $X$  suit la loi de probabilité  $\mathcal{N}(1, 2)$ .

- (1) Calculer  $P(X < 2)$ ,
- (2) Déterminer  $a$ ,  $a > 1$  tel que  $P(1 \leq X < a) = 0,25$ .

*Exercice 4.* On lance 1000 fois une pièce de monnaie.

- (1) Quelle est la probabilité de faire 510 pile ?
- (2) Quelle est la probabilité pour que le nombre de piles soit compris entre 490 et 510 ?

*Exercice 5.* Une variable aléatoire est dite uniforme si elle est continue et si sa fonction de densité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (1) Déterminer sa fonction de répartition.
- (2) On considère une résistance électrique  $R$  est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme entre  $900\Omega$  et  $1100\Omega$ . Trouver la probabilité  $P(950 \leq R \leq 1050)$ .

*Exercice 6.* Une variable aléatoire continue  $X$  suit la loi de Cauchy si sa fonction de densité est et si sa fonction de densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + (x - m)^2}.$$

Donner le trapèze de cette fonction. Que peut-on dire de son espérance et de son écart-type ?

*Exercice 7.* Une variable aléatoire continue  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si sa loi de probabilité est donnée par

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

La loi de Poisson permet de décrire des événements rares.

- (1) Déterminer son espérance et son écart-type.
- (2) Pour  $n$  "assez grand" (par exemple  $n > 30$  et pour  $p$  voisin de 0 (par exemple  $p < 0,1$ ) et  $np(1-p) \leq 10$ , on peut approcher la loi binomiale  $B(n, p)$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$ , soit

$$P(X = k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Dans une chaîne de fabrication, 5 pour cent des pièces sont défectueuses ; on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la remplace parmi les autres. On répète

120 fois cette expérience. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage de 120 pièces associe le nombre des pièces défectueuses.  $X$  suit une loi binomiale. Calculer  $P(X = 5)$  en utilisant l'approximation par la loi de Poisson.