CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique RCP103

Mathématiques : Modélisation markovienne

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 5

Chaines de Markov en temps continu

Table des matières

1. Loi exponentielle

1.1. **Définition.** On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, ce que l'on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

si elle admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1. *Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors son espérance et sa variance sont données par*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration. En effet

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

De même, en intégrant par parties,

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} (t - \frac{1}{\lambda})\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La loi exponentielle sert souvent à modéliser la durée de vie, d'une ampoule comme d'un atome radioactif.

1.2. **Loi géométrique.** On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$, ce que l'on note

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

si

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \geq 1, \quad P(X = k) = p^k(1-p)^{k-1}. \end{cases}$$

Dans ce cas on a

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Un exemple caractéristique de ce modèle est celui du temps d'attente : On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir pile est p. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p.

La loi exponentielle est la version continue de la loi géométrique.

1.3. **Variables aléatoires sans mémoire.**

Définition 1. *Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est dite sans mémoire si*

$$\forall x, y \geq 0, \; P(X \geq x + y \mid P(X) \geq y) = P(X \geq x).$$

Interprétation : Si X modèlise la durée de vie d'un individu A, la propriété que X est sans mémoire exprime que A ne vieillit pas : si A a vécu y années, la probabilité pour qu'il vive encore x années est la même que la probabilité pour qu'un individu similaire à A qui vient de naître vive lui aussi x années.

Proposition 2. *Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup +\infty$ suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété d'absence de mémoire.*

2. Chaînes de Markov à temps continus

2.1. **Données du problème.** On va s'intéresser à des processus aléatoires $X(t)$, non pas comme dans le chapitre précédent où le temps t était discret ou fini, mais ici les processus sont indexés par le temps continu $t \in \mathbb{R}_+$. On va supposer tout de même que **les valeurs des vaiables $X(t)$ appartiennent toutes à un même espace fini (ou dénombrable)** $I = \{0, 1, \cdots, M\}$. Ainsi, l'état du système décrit par les variables $X(t)$ à l'instant t :

$$X(t) \in \{0, 1, \cdots, M\}.$$

Nous pouvons donc définir une suite croissante t_n où chaque t_k correspond à un changement d'états :

$$\begin{array}{ll} X(t) = i_0 = X(0) \in I, & t \in [0, t_1[\\ X(t) = i_1 = X(t_1) \in I, & t \in [t_1, t_2[\\ \cdots & \\ X(t) = i_k = X(t_k) \in I, & t \in [t_k, t_{k+1}[\\ \cdots & \end{array}$$

Considérons trois points consécutifs dans le temps où il y a eu un changement d'états :

$$X(t_{k-1}), X(t_k), X(t_{k+1})$$

en supposant que le temps "actuel" est t_k. Posons $X(t_{k-1}) = i \in I,\ X(t_k) = j$ correspondant aux états en l'instant actuel et à l'état précédant. On souhaite évaluer

$$P(X(t_{k+1}) = l \mid X(t_k) = i \text{ et } X(t_{k-1}) = j).$$

Définition 2. *Un processus aléatoire en temps continu $X(t)$ a la propriété de Markov si*

$$P(X(t_{k+1}) = l \mid X(t_k) = i \text{ et } X(t_{k-1}) = j) = P(X(t_{k+1}) = l \mid X(t_k) = i)$$

pour tout $i, j, l\ddot{\imath}nI$ et pour tout t_k. On dit alors que $X(t)$ est une chaîne de Markov en temps continu.

Rappelons que toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé Ω. Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \to X(t)(\omega)$$

sont appelées les trajectoires du processus. Ces fonctions vérifient

$$X(t + \epsilon)(\omega) = X(t)(\omega)$$

pour tout ϵ infiniment petit.

2.2. **Probabilités de transition.** Les probabilités

$$P(X(t_{k+1}) = j \mid X(t_k) = i)$$

sont appelées, comme dans le cas fini, les probabilités de transition. Plus généralement, on notera

$$p_{i,j}(t - s) = P(X(t) = j \mid X(s) = i).$$

Comme dans le cas fini, on a

Proposition 3. *Si $X(t)$ est une chaîne de Markov en temps continu homogène, les probabilités de transition sont stationnaires :*

$$P(X(t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

pour tout temps t_k.

On notera

$$p_{i,j}(t) = P(X(t) = j \mid X(0) = i),$$

cette fonction du temps est appelée la fonction de probabilité de transition de la chaîne $X(t)$. Nous ferons l'hypothèse suivante :

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Comme par hypothèse, il n'y a qu'un nombre fini de changement d'états, on définit ainsi une matrice $p(t)$ dépendant du temps :

$$p(t) = (p_{i,j}(t))$$

et l'hypothèse précédente se traduit par

$$\lim_{t \to 0} p(t) = Id.$$

Cette matrice $p(t)$ est appelée la matrice de transition du processus $X(t)$.

Proposition 4. *La matrice de transition $p(t)$ vérifie la relation de* **Chapman-Komogorov** *:*

$$p(t+s) = p(t)p(s).$$

2.3. **Temps passé dans un état.** Soit $i \in I$ un état de la chaîne. Notons par T_i la variable aléatoire du temps passé dans l'état i. Par exemple si $i = i_l \in I$, le temps passé dans cet état est $t_{l+1} - t_l$. Supposons donc que le processus rentre en l'état i en l'instant s. Pour tout $t > 0$, on a donc

$$T_i > t \Longleftrightarrow \forall t' \in [s, s+t]\ X(t') = i.$$

Or on a vu que les probabilités de transition sont stationnaires c'est-à-dire

$$P(X(t) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

on en déduit

$$P(T_i > s + t \mid T_i > s) = P(T_i > t).$$

Ainsi la variable aléatoire T_i est une variable sans mémoire.

Proposition 5. *La variable aléatoire T_i du temps passé dans l'état i est une variable sans mémoire. Elle suit donc la loi exponentielle.*

Notons λ_i le paramètre de cette loi exponentielle. On aura donc

$$\begin{cases} P(T_i > t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \\ E(T_i) = \dfrac{1}{\lambda_i}. \end{cases}$$

3. Le générateur infinitésimal

Nous allons relier le paramètre λ_i de la variable T_i à la fonction de transition de la chaîne de Markov $X(t)$.

3.1. **Définition.** La matrice de transition $p(t)$ est une matrice qui dépend du temps Pt est une fonction du temps, Nous allons regarder le rôle que joue la dérivée en 0 de cette fonction. Rappelons que

$$\lim_{t\to 0} p(t) = Id.$$

Définition 3. *On appelle générateur infinitésimal de la chaîne, la matrice*

$$q = \lim_{t\to 0} \frac{p(t) - Id}{t}.$$

Si nous posons $q(q_{ij})$, alors

$$\begin{cases} q_i = q_{ii} = (\frac{d}{dt} p_{ii}(t))(0), \\ q_{ij} = (\frac{d}{dt} p_{ij}(t))(0), \end{cases}$$

Proposition 6. *On a :*

(1) $\lambda_i = -q_{ii}$ *et donc* $-q_{ii}$ *représente la moyenne du temps passé à chaque visite dans l'état* i.

(2) q_{ij} *représente le temps moyen que le processus passe de l'état* i *à l'état* j *et vérifie*

$$q_{ij} \simeq P(X(t+dt) = j | X(t) = i),$$

(3) $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0,$

(4) $q_{ii} \leq 0,\ q_{ij} \geq 0, i \neq j,$

(5) $q_{ii} = -\sum_{j\neq i} q_{ij}.$

3.2. **Interprétation des coefficients q_{ij}.** Par définition on a bien

$$P(X(t+dt) = j | X(t) = i) = q_{ij}dt + o(dt).$$

La matrice $Q = (q_{ij})$ est appelée le générateur du processus $X(t)$. Les coefficients q_{ij} du générateur $Q = (q_{ij})$ représentent donc le taux de transition de l'état i vers l'état j pour $i \neq j$. C'est donc la vitesse de l'événement qui fait passer le système de l'état i vers l'état j. Ceci est équivalent à dire que q_{ij} est le nombre moyen de fois que le processus passe de i à j par unité de temps passé à l'état i.

Si T_i est la variable aléatoire correspondant au temps passé dans l'état i, alors $E(T_i)$ est la moyenne du temps passé dans chaque visite dans cet état. Ainsi $1/E(T_i)$ est le taux de transition à partir de i, c'est-à-dire $q_i = q_{ii}$.

Proposition 7. *La variable aléatoire* T_i *correspondant au temps de séjour en* i *suit la loi exponentielle de paramètre* q_i.

Il n'y a jamais de taux de transition de i vers lui-même. La chaîne reste dans cet état un temps exponentiellement distribué de paramètre q_i. Puis il y a un saut instatanée de l'état i à l'état j de probabilité $-\frac{q_{ij}}{q_i}$.

3.3. **La variable aléatoire T_{ij}.** Pour $i \neq j$, considérons la variable aléatoire T_{ij} correspondant, chaque fois que le processus atteint l'état i, au temps passé dans cet état avant la première transition vers l'état j.

Proposition 8. *Les varaibles aléatoires T_{ij}, $i \neq j$ sont indépendantes et suivent les lois exponentielles de paramètres q_{ij}.*

La moyenne de T_{ij} est donc égale à

$$E(T_{ij}) = \frac{1}{q_{ij}}.$$

Ainsi le temps passé dans l'état i, c'est-à-dire T_i avant une transition est le minimum sur tous $(j \neq i)$ des T_{ij}. Quand la transition se produit, la probabilité qu'elle soit vers l'état est donc

$$p_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_i}.$$

4. Distribution limite

Comme dans le cas discret, nous aimerions savoir s'il existe un régime stationnaire. Rappelons que les probabilités de transition vérifient l'identité de Chapman-Kolmogorov :

$$p_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t-s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

4.1. **Chaînes homogènes.**

Définition 4. *On dit que deux états i, j de la chaîne de Markov $X(t)$ communiquent s'il existe deux temps $t_1 > 0, t_2 > 0$ tels que*

$$p_{ij}(t_1) > 0, \quad p_{ji}(t_2) > 0.$$

Tous les états qui communiquent forment une classe

Définition 5. *La chaîne de Markov $X(t)$ est dite irréductible s'il n'existe qu'une seule casse, c'est-à-dire si tous les états communiquent entre eux.*

Dorénavant, nous allons supposer que les chaînes de Markov considérées sont irréductibles :

$$p_{ij}(t) > 0, \ \forall t > 0.$$

Considérons alors le système linéaire

$$\pi Q = 0$$

où Q est la matrice génératrice du système et $\pi = (\pi(1), \cdots, \pi(n))$ un vecteur d'ordre n.

Théorème 1. *Si le système $\pi Q = 0$ admet une solution positive, $\pi^* = (\pi^*(1), \cdots, \pi^* i(n))$ avec $\pi^*(j) > 0$ pour tout j,vérifiant*

$$\pi^*(1) + \cdots + \pi^*(n) = 1$$

c'est-à-dire π^* est un vecteur de probabilité, alors

$$\pi^*(i) = \lim_{t \to +\infty} (P(X(t) = i).$$