Université de Haute Alsace-Mulhouse **Année universitaire 2018/2019**

Licence 2 Mathématiques et Informatique

COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Introduction à la géométrie vectorielle et euclidienne

cours Elisabeth Remm

Feuille d'exercices 1. Espaces vectoriels et Applications Linéaires

Exercice 1

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3^2 = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 x_2 = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \cos x_1 + 2e^{x_2} - x_3^2 = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$.

Exercice 2

Soit $gl(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

1. Montrer que c'est un espace vectoriel réel de dimension finie.
2. Soit $so(n)$ le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices vérifiant
$$M = -{}^tM.$$
Montrer que c'est un espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $GL(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $gl(n, \mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Est-ce un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3

Dans un espace vectoriel E à quatre dimensions rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3}$ de composantes
$$\overrightarrow{X_1} = (2, 1, 4, -3),\ \overrightarrow{X_2} = (1, -1, -1, -3),\ \overrightarrow{X_3} = (1, 2, 5, 0).$$

1. Montrer que ces vecteurs sont linéairement dépendants et former la relation par laquelle ils sont liés.
2. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs et en donner une base.
3. Compléter cette base pour obtenir une base de E

Exercice 4

Dans un espace vectoriel complexe à trois dimension rapporté à une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on donne les vecteurs
$$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{e_2} + i\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{e_3} + i\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{X_3} = \overrightarrow{e_1} + i\overrightarrow{e_2}.$$
Montrer que ces trois vecteurs forment une base et trouver dans cette base les composantes du vecteurs $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces vectoriels F_1,F_2 et F_3 sont dits supplémentaires si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{X_3}$$
avec $\overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2$ et $\overrightarrow{X_3} \in F_3$.

1. Soient F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$, F_2 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)$ et F_3 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0,2,0)$. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.
2. Soit F_4 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_4} = (1,2,1)$, F_5 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (1,1,0)$ et F_6 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $\overrightarrow{v_3} = (0,1,1)$. Montrer que $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i,j = 4,5,6$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6

(Dans certains exercices qui suivent, nous ne noterons plus, pour en prendre l'habitude, les éléments des espaces vectoriels par des lettres surmontées d'un vecteur. Prendre garde aux notations et aux données). On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x+y=0,\ \text{et } x+z=0\big\}$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$, $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ?
4. On pose G le sous-espace engendré par (u_1,u_2,u_3). Quelle sa dimension ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et un élément de G ?

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,2,0,1)\ v_2 = (1,0,2,1),\ v_3 = (2,2,2,2),$$
$$w_1 = (1,2,1,0)\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1),\ w_4 = (2,2,2,2).$$

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre et que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3,
   (a) Déterminer une base de F.
   (b) Déterminer un sous-espace supplémentaire de F.
3. Montrer que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et que $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ est liée.
4. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est libre.
5. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4. Déterminer une base de G.
6. Déterminer $F \cap G$. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires.

Exercice 8

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$, définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. On note (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2, f_3, f_4) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ en fonction de (f_1, f_2, f_3, f_4).
3. Écrire la matrice de u dans ces bases canoniques.
4. Montrer que $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les (e_1, e_2, e_3) et $(f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$.

Exercice 9

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1,-2,0)$, $w_2 = (-1,2,0)$, $w_3 = (0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par la donnée des images de vecteurs de base :

$$u(e_1) = w_1,\ u(e_2) = w_2,\ u(e_3) = w_3.$$

1. a) Exprimer (w_1, w_2, w_3) en fonction de (e_1, e_2, e_3). En déduire la matrice de u dans la base canonique.
   b) Soit $W = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. Trouver une base de $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 10

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de r«efléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Dérminer une base de $\ker f$.
3. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 13

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de u dans les nouvelles bases.

Exercice 14

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base de cher f et $\operatorname{Im} f$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.