CNAM MULHOUSE .

Technicien Développeur Année 2.

Outils mathématiques

Cours Michel GOZE

Chapitre 1

Combinatoire

1. Ensembles. Cardinalité

1.1. **Un bref rappel sur les ensembles.** Un ensemble est une collection d'objets appelés les éléments de cet ensemble.

Exemples

(1) $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, /cdots/)$
(2) $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{Z} = \{cdots, -3, -2, -1 = \{0, 1, 2, 3, /cdots/)$
(3) $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q} = \{p/Q, \;\; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0\}$,
(4) $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Un ensemble qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments est dit fini. Lorsque ce nombre fini n'est pas trop grand, on représente parfois cet ensemble en écrivant tous les éléments qu'il contient de la façon suivante :

$$\{a, b, c\}$$

il s'agit ici d'un ensemble contenant (seulement) les trois lettres a, b, c.

Soit E un ensemble. Si a est un élément de E, on écrit

$$a \in E$$

qui se lit a appartient à E.

Définition 1. *Deux ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre, autrement dit si $a \in E$ alors $a \in F$ et si $b \in F$ alors $b \in E$.*

Définition 2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F. Dans ce cas on écrit*

$$E \subset F$$

qui se lit E est inclus dans F.

L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément. C'est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble.

Définition 3. *Soit E un ensemble. On appelle l'ensemble des parties de E, l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de E.*

Cet ensemble va jouer un rôle prépondérant dans la suite. **Exemples**

(1) Soit E l'ensemble à deux éléments : $E = \{a, b\}$. Alors E admet comme sous-ensembles $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ et E lui même. En effet, de par la définition de l'inclusion, on a toujours $E \subset E$. Ainsi
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}.$$
Si E contient 2 éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 4 éléments.

(2) Soit E l'ensemble à trois éléments : $E = \{a, b, c\}$. Alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$
Dans ce cas $\mathcal{P}(E)$ contient 8 éléments.

Soient A et B deux sous-ensembles de E. On définit

(1) $A \bigcup B = \{x \in E,\ x \in A$ **ou** $x \in B\}$
(2) $A \bigcap B = \{x \in E,\ x \in A$ **et** $x \in B\}$
(3) $\complement_E A = \{x \in E$ tels que $x \notin A\}$
(4) $A \setminus B = \{x \in E,\ x \in A$ **et** $x \notin B\}$.

1.2. Cardinal d'un ensemble fini.

Définition 4. *Un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments (o peut compter tous ses éléments). Si E est un ensemble fini, son cardinal noté* $\mathrm{card}(E)$ *est le nombre de ses éléments.*

Si A est une partie de E, alors $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$ et comme E est supposé fini, l'égalité n'a lieu que si $A = E$. On note dès à présent que ceci est faux si E est infini (s'il n'est pas fini).

Quelques propriétés du cardinal

(1) Si A et B sont des sous-ensembles d'un ensemble fini E, alors
$$\mathrm{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)}.$$

(2) Soit $A \times B = \{(a, b), A \in A, b \in B\}$ le produit cartésien de A et B, alors
$$\mathrm{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}.$$

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Alors

Proposition 1. *Si* $n = \mathrm{card(E)}$*, alors*
$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 2^{\mathrm{n}}.$$

Par exemple si $E = 1, 2$, alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$$
et $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 4 = 2^2$. De même, si $E = \{1, 2, 3\}$, alors
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$$
et $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 8 = 2^3$.

2. Applications, bijections

2.1. Applications injectives, surjectives, bijectives.

Définition 5. *Soient E et F deux ensembles. On appelle fonction définie sur E et à valeurs dans F toute opération consistant à faire correspondre à chaque élément $x \in E$ un élément bien déterminé de F ;*

L'ensemble E s'appelle l'ensemble de définition de la fonction. Au lieu de dire "soit une fonction ayant E comme ensemble de départ et F comme ensemble d'arrivée, on dira plutôt : **soit f une application de E dans F.**

2.2. Composition des applications.

Soient A_1,A_2 et A_3 trois ensembles et
$$f : A_1 \to A_2, \quad g : A_2 \to A_3$$
deux applications. Alors l'application
$$x \in A_1 \to g(f(x)) \in A_3$$
est une application de A_1 dans A_3 appelée la composition de g et f et notée $g \circ f$:
$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

2.3. Applications injectives, surjectives et bijectives.

Soit $f : A \to B$ une application.

Définition 6.
1. *On dit que f est* **injective** *si deux éléments distincts de A ont des images distinctes, autrement dit si*
$$x \neq x' \ (x, x' \in A) \ \text{ implique } \ f(x) \neq f(x').$$
2. *On dit que f est Bf surjective si tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.*
3. *On dit que f est Bf bijective si elle est injective et surjective.*

On notera que la condition d'injectivité est équivalente à

$$\text{pour tout } x, x' \in A, \text{ alors } f(x) = f(x') \text{ implique } x = x'.$$

La condition de surjectivité s'écrit aussi :

$$\text{Pour tout } y \in B, \text{ il existe } x \in A \text{tel que } y = f(x).$$

2.4. **Image réciproque.** Soit $f : A \to B$ une application. On appelle image directe de A par f et on le note $f(A)$ le sous-ensemble de B définie par

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Ainsi, dire que f est surjective se traduit par $B = f(A)$.

Soit $B_1 \subseteq B$ un sous-ensemble de B. On appelle image réciproque de B_1 par f le sous-ensemble de A, noté $f^{-1}(B_1)$ dont les éléments sont les éléments $x \in A$ tels que $f(x) \in B_1$:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A,\ f(x) \in B_1\}.$$

ATTENTION Il ne faut pas confondre la notation f^{-1} que nous venons de présenter avec la fonction f^{-1} qui est notée de la même manière mais qui n'est définie que si f et bijective et qui représente dans ce cas l'application inverse :

$$f \circ f^{-1} = Id_B, \quad f^{-1} \circ f = Id_A$$

où Id désigne l'application identité.

2.5. **L'ensemble E^F.** Soient E et F deux ensembles finis. Soit F^E l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

Proposition 2. *Si* $n = \mathrm{card(E)}$ *et* $p = \mathrm{card(F)}$*, alors*

$$\mathrm{card(F^E) = p^n}.$$

Par exemple si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathrm{card(F^E)} = 3^2 = 9.$$

Certte propriété est très pratique car elle évite de lister toutes les applications pour pouvoir les compter. Dans cet exemple, les 9 applications sont

$$\begin{cases} f_1(1) = a, f_1(2) = a \\ f_2(1) = a, f_2(2) = b \\ f_3(1) = a, f_3(2) = c \\ f_4(1) = b, f_4(2) = a \\ f_5(1) = b, f_5(2) = b \\ f_6(1) = b, f_6(2) = c \\ f_7(1) = c, f_7(2) = a \\ f_8(1) = c, f_8(2) = b \\ f_9(1) = c, f_9(2) = c \end{cases}$$

EXERCICES

Exercice 1. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer que si
$$A \bigcup C \subset A \bigcup B \text{ et } A \bigcap C \subset A \bigcap B$$
alors
$$C \subset B.$$

Exercice 2. Soient A, B des sous-ensembles d'un ensemble donné E. Montrer
(1) $A \subset B$ si et seulement si $A \bigcup B = B$
(2) $A \subset B$ si et seulement si $\complement_E A \bigcup B = E$

Exercice 3. Démontrer les lois de Morgan.

Exercice 4. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5. Soit E un ensemble fini de n éléments. Déterminer le nombre d'élément de $\mathcal{P}(E)$.