UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Physique-Chimie-SPI

Mathématiques : ALGEBRE LINEAIRE et APPLICATIONS

Elisabeth REMM

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels et applications linéaires

Table des matières

1. Les espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel réel ou complexe a été vue en première année. Nous faisons dans ce chapitre un bref rappel des notions essentielles et indispensables pour la suite de ce cours. Nous noterons par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Lorsque nous ne voudrons pas distinguer ces deux ensembles, nous utiliserons le symbole $\mathbb{K}$, ainsi $\mathbb{K}$ désignera l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. **Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.** Soit E un ensemble dont les éléments, qui seront appelés "vecteurs", seront notés par une majuscule fléchée, comme $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ ou même indexée, $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}$. Les éléments de $\mathbb{K}$, appelés "scalaires" seront notés par une minuscule latine ou grecque, x,y,α qui peuvent être indexées x_1,x_2,α_3.

Définition 1. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, s'il possède les propriétés suivantes*

(1) L'ensemble E est non vide, i.e. $E \neq \emptyset$.

(2) Il est muni d'une première opération **interne**, *appelée addition, qui associe à deux éléments quelconques $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ de E un troisième élément noté $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$, cette opération possédant les propriétés suivantes :*

(a) Elle est associative $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in E, \quad (\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) + \overrightarrow{Z} = \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z})$,

(b) Elle est commutative : $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{X}$,

(c) Il existe un élément neutre $\overrightarrow{0}$, appelé vecteur nul : $\forall \overrightarrow{X} \in E, \quad \overrightarrow{X} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$,

(d) Tout élément $\overrightarrow{X}$ de E possède un symétrique dans E aussi appelé opposé $(\overrightarrow{-X}) \in E$ par rapport à $\overrightarrow{0}$:

$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{K}, \exists (\overrightarrow{-X}) \in E, \quad \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{-X}) = \overrightarrow{0}.$$

(3) Il est muni d'une deuxième opération **externe**, *appelée la multiplication par un scalaire ou multiplication externe, qui à un élément $\overrightarrow{X}$ de E et un scalaire α de $\mathbb{K}$ fait correspondre un vecteur noté $\alpha\overrightarrow{X}$ de E, cette opération vérifiant les propriétés suivantes*

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall \overrightarrow{X} \in E, \ \alpha(\beta\overrightarrow{X}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{X}$,

(b) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall \overrightarrow{X} \in E, \ (\alpha + \beta)\overrightarrow{X} = \alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{X}$,

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in E, \ \alpha(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}) = \alpha\overrightarrow{X} + \alpha\overrightarrow{Y}$,

(d) $\forall \overrightarrow{X} \in E, \ 1\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}$.

Conséquences :

(1) $0\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}, \ \forall \overrightarrow{X} \in E$.

(2) $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

(3) $\alpha\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.

(4) $\overrightarrow{-X} = -1\overrightarrow{X} = -\overrightarrow{X}$.

On peut également démontrer que l'élément neutre est unique et l'unicité de l'opposé d'un élément.

1.2. **Exemples d'espaces vectoriels.**

(1) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(2) $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(3) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels.

(4) Soit n un entier positif non nul et $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\}$ l'ensemble des n-uples de nombres réels. Alors $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour les deux opérations suivantes :

   (a) $(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$,

   (b) $\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

(5) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'addition est définie par

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

et la multiplication par un scalaire par

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)).$$

L'ensemble des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même pour l'ensemble des fonctions dérivables.

(6) Soit $v_1, v_2, \cdots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs c'est à dire $Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_n\,;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Plus généralement si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $v_1, v_2, \cdots, v_p$ des vecteurs de E alors

$$Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, \cdots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_n\,;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné

Définition 2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit F une partie non vide de E.*

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

(1) La somme $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y}$ de deux vecteurs de F est encore dans F,

(2) Le produit $\alpha\overrightarrow{X}$ de $\alpha \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ est encore dans F.

Ces deux conditions peuvent se résumer en une seule : un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in F$, alors

$$\alpha\overrightarrow{X} + \beta\overrightarrow{Y} \in F.$$

On vérifie sans peine que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Alors l'intersection $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 2. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensemble noté $F_1 + F_2$ et défini ainsi*

$$F_1 + F_2 = \{\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}\,;\ \overrightarrow{X_1} \in F_1, \overrightarrow{X_2} \in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, la somme des espaces vectoriels F_1 et F_2. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant le sous-ensemble $F_1 \cup F_2$.

3. Famille libre, famille génératrice, base d'un espace vectoriel. Espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ un système de p vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* de ces p vecteurs tout somme de la forme

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p}.$$

Une telle somme est bien un vecteur de E.

3.1. Vecteurs linéairement dépendants (liés), vecteurs linéairement indépendants (libres).

Définition 3. *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement dépendants ou liés s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ non tous nuls tels que*

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0}.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est liée.

Définition 4. *Les vecteurs $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}$ de E sont dits linéairement indépendants ou libres si pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$*

$$\alpha_1\overrightarrow{X_1} + \alpha_2\overrightarrow{X_2} + \cdots \alpha_p\overrightarrow{X_p} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_p = 0.$$

On dira également que la famille de vecteurs $\{\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \cdots, \overrightarrow{X_p}\}$ est libre.

Il est clair que si on enlève un vecteur a une famille libre elle est encore libre.

3.2. Famille génératrice.

Définition 5. *Soit $\{\overrightarrow{X}_1, \cdots, \overrightarrow{X}_p\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice si tout vecteur de E s'écrit (pas nécessairement de manière unique) comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.*

Il est clair que toute famille qui contient une famille génératrice est elle même génératrice donc en ajoutant un vecteur a une famille génératrice on obtient une famille qui est encore génératrice.

Proposition 3. *Si $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_p\}$ est une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F alors $F = Vect_{\mathbb{K}}\{e_1, \cdots, e_p\}$.*

3.3. **Base.**

Définition 6. *Soit* $\{\overrightarrow{X}_1, \cdots, \overrightarrow{X}_p\}$ *une famille de vecteurs de* E*. On dit que cette famille est une base de* E *si c'est une famille de vecteurs de* E *qui est libre et génératrice*

Théorème 1. *Une base est*

(1) *une famille libre maximale (c'est à dire que si on ajoute un vecteur à cette famille libre, la nouvelle famille obtenue n'est plus libre).*

(2) *une famille génératrice minimale (c'est à dire que si on enlève un vecteur à cette famille génératrice la nouvelle famille obtenue n'est plus génératrice).*

3.4. **Espaces vectoriels de dimension finie.**

Définition 7. *Si un espace vectoriel* E *sur* $\mathbb{K}$ *admet une base avec un nombre fini* n *d'éléments alors il est dit de dimension finie. Toute base de* E *a alors le même nombre d'éléments* n *qui est appelée la dimension de* E *:* $\dim E = n$*.*

Théorème 2. *Etant donnée une base quelconque* $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ *de l'espace vectoriel* E *de dimension* n*, tout vecteur* $\overrightarrow{X}$ *de* E *s'exprime de manière unique*

$$\overrightarrow{X} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$$

comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.

Proposition 4. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *Une base de* E *est obtenue en prenant une famille génératrice de* n *éléments. Une base de* E *est obtenue en prenant une famille libre de* n *éléments*

Remarques.

Un espace vectoriel E de dimension n admet une infinité de bases mais toute base de E a n éléments.

Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie est aussi de dimension finie.

3.5. **Le théorème de la base incomplète.** Nous rappelons dans ce paragraphe un théorème fort pratique pour faire du calcul analytique dans un sous-espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 3. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$*, avec* $p < n$*, une famille de vecteurs de* E *linéairement indépendants. Il existe alors des vecteurs* $\overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$ *tels que la famille* $\{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ *soit une base de* E*.*

Une conséquence intéressante est la suivante : soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Soit donnée une base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ de ce sous-espace. Nous pouvons toujours compléter cette base en une base $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Dans les chapitres suivants, nous verrons de nombreuses applications.

3.6. **Extraction d'une base à partir d'une famille génératrice.**

Théorème 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_p}\}$ une famille génératrice de vecteurs de E. On peut en extraire une famille de vecteurs qui soit encore génératrice mais qui soit libre donc une base de E.*

Un exemple classique d'extraction d'une base à partir d'une famille génératrice : $Vect_{\mathbb{K}}\{e_1, \cdots, e_p\}$

Proposition 5. *Soit $\{e_1, \cdots e_p\}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit*

$$F = Vect_{\mathbb{K}}\{e_1, \cdots e_p\},$$

c'est-à-dire que F est le sous-espace vectoriel de E (c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) engendré par la famille de vecteurs $\{e_1, \cdots, e_p\}$. Alors on peut extraire une base de F à partir de de la famille génératrice de F $\{e_1, \cdots e_p\}$. On a $dimF \leq p$.

Remarque : Si $dimF = dimE$ alors puisque F est un sous-espace vectoriel de E on a $F = E$.

3.7. **Somme directe de sous-espaces vectoriels, supplémentaires d'un espace vectoriel.**
Somme directe. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 8. *Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont dits en* **somme directe** *si tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. On écrit alors $F_1 \oplus F_2$.*

Proposition 6. *Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont en somme directe si et seulement $F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}$*

Sous-espaces supplémentaires.

Définition 9. *Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont dits en* **supplémentaires dans** *F si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2. On écrit alors $F_1 \oplus F_2 = E$.*

Théorème 5. *Les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont supplémentaires si et seulement si*

$$\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{\overrightarrow{0}\}, \\ F_1 + F_2 = E. \end{cases}$$

Proposition 7. En utilisant des bases de F_1 et F_2 :

Les espaces F_1 et F_2 sont

(1) *en somme directe si la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2 est une famille libre, c'est-à-dire que, si $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \cdots, e_p\}$ est une base de F_1 et $\mathcal{B}_2 = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q\}$ est une base de F_2, alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $\{e_1, \cdots, e_p, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q\}$ est une famille libre de E.*

(2) *supplémentaires dans E si la concaténation d'une base de F_1 et d'une base de F_2 est une base de E.*

Ceci permet également de montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E admet plusieurs espaces supplémentaires. Prenons $E = \mathbb{R}^3$ (qui est donc de dimension 3) et $F = Vect_{\mathbb{R}}\{v = (1, 2, 3)\}$. La famille $\{v, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque la matrice des coordonnées de ces vecteurs dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est de déterminant non nul :

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Alors l'espace vectoriel $G = Vect_{\mathbb{R}}\{e_2, e_3\}$ est un espace supplémentaire de F.

De même, $H = Vect_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$ est un espace supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ pour les mêmes raisons : la matrice des coordonnées des vecteurs $\{v, e_1, e_2\}$ est

$$Mat_{\mathcal{B}}(v, e_2, e_3) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

et on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(v, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

donc $\{v, e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $F \oplus H = \mathbb{R}^3$ (F et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$).

Les espaces vectoriels G et H étant distincts, on a bien plusieurs espaces supplémentaires pour F dans $\mathbb{R}^3$.

On verra par la suite qu'il y a la possibilité dans un espace euclidien (espace vectoriel muni en plus d'un produit scalaire) d'avoir un supplémentaire privilégié : le supplémentaire orthogonal à F (par rapport au produit scalaire).

4. Applications linéaires

Nous allons revenir, dans ce paragraphe, sur les applications linéaires entre deux espaces vectoriels, c'est-à-dire les applications qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs du premier espace en une combinaison linéaire de vecteurs du deuxième espace.

4.1. **Définition.**

Définition 10. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit*

$$f : E \to F$$

une application de E dans F. Elle est appelée linéaire si elle vérifie

(1) $\forall \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \in E, \quad f(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}) = f(\overrightarrow{X_1}) + f(\overrightarrow{X_2})$,

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha \overrightarrow{X}) = \alpha f(\overrightarrow{X}), \ \forall \overrightarrow{X} \in E$.

Nous en déduisons immédiatement que si $\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{X_p}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de E, alors

$$f(\alpha_1 \overrightarrow{X_1} + \alpha_2 \overrightarrow{X_2} + \cdots + \alpha_p \overrightarrow{X_p}) = \alpha_1 f(\overrightarrow{X_1}) + \alpha_2 f(\overrightarrow{X_2}) + \cdots + \alpha_p f(\overrightarrow{X_p}).$$

4.2. **Noyau et Image d'une application linéaire.** Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. De la définition, nous déduisons

$$f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$$

où $\overrightarrow{0_E}$ désigne le vecteur nul de E et $\overrightarrow{0_F}$ celui de F. Ainsi le sous-ensemble de E des vecteurs qui ont pour image par f le vecteur nul contient au moins $\overrightarrow{0}_E$. On appelle **Noyau de** f ce sous-ensemble de E :

$$Ker(f) = \{\overrightarrow{X} \in E;\ f(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{0_F}\}.$$

Proposition 8. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors $Ker(f)$ est un* **sous-espace vectoriel de** *E.*

Proposition 9. *L'application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement son noyau $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.*

On appelle **Image** de l'application linéaire $f : E \to F$ le sous-ensemble de F, noté $\mathrm{Im}(f)$ constitué de tous les éléments images par f des éléments de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\overrightarrow{X});\ \overrightarrow{X} \in E\}.$$

Proposition 10. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

On en déduit

Proposition 11. *L'application linéaire $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Démonstration. Ici il n'y a pas grand chose a démontrer car c'est une reformulation même de la définition de la surjectivité.

Remarque : Comment déterminer $\mathrm{Im}(f)$ lorsque E est de dimension finie. Supposons que E soit de dimension finie n. Considérons une base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ de E. Tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de E se décompose sur cette base $\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. Considérons le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de F. Soit $\overrightarrow{Y} \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $\overrightarrow{X} \in E$ tel que $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X}) = f(x_1\overrightarrow{e}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{e}_n) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}).$$

Ce qui montre que tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$. On en déduit que **si** $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ **est une base de** E **alors la famille** $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})\}$ **est une famille génératrice de** F. Mais notons que cette famille n'est pas en général libre et n'est pas en général une base de $\mathrm{Im}(f)$. Le théorème suivant apporte quelque précision sur ceci.

4.3. **Cas de la dimension finie : le théorème Noyau-Image.** Supposons à présent que les espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ soient de dimension finie.

Théorème 6. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On a alors*

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Définition 11. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle rang de f et on le note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$:*

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi le théorème noyau image donne la valeur du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim E - \dim \ker(f).$$

On notera que dans cette formule la dimension de F n'intervient pas.

4.4. **Applications.**

(1) Pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que $\mathrm{rg}(f) = \dim F$. En effet, comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, sa dimension est inférieure ou égale à celle de F et nous avons $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement s'ils ont la même dimension.

(2) Rappelons qu'une application est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi une application linéaire est bijective si et seulement si on a à la fois
   (a) $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$,
   (b) $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.

(3) Supposons que $F = E$ c'est-à-dire que f soit une application linéaire

$$f : E \to E$$

On dit dans ce cas que l'application linéaire est un *endomorphisme* de E. Supposons que f soit injective. Alors $\ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et donc $\dim \ker(f) = 0$. Ainsi

$$\dim E = \dim \mathrm{Im}(f).$$

Mais ici $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. Ils coïncident donc :

$$E = \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi f est surjective donc bijective.

Proposition 12. *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors si f est injectif, il est aussi surjectf et donc bijectif. De même si f est surjectif, il est aussi injectif donc bijectif.*

Démonstration. La deuxième partie de cette proposition se démontre comme la première.

5. Calcul analytique. Matrices d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. La remarque qui suit va être la base du calcul analytique.

L'application linéaire f est entièrement déterminée dès que l'on connait les images des vecteurs d'une base de E.

Expliquons cette remarque. Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ une base de E. Si $\overrightarrow{X} \in E$, il s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

et le n-uple $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les composantes de $\overrightarrow{X}$ relatives à la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{X}) &= f(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) \\ &= x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + x_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n}). \end{aligned}$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{X}$ étant donné, ses composantes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (dans la base $\mathcal{B}$) sont aussi données et donc $f(\overrightarrow{X})$ peut être calculé dès que l'on connait les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_n})$.

Donnons à présent une base de F : $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \cdots, \overrightarrow{f}_p\}$ (nous supposons $p = \dim F$). Chacun des vecteurs $f(\overrightarrow{e}_i)$ est dans F et se décompose ainsi

$$f(\overrightarrow{e}_i) = \alpha_{1,i}\overrightarrow{f}_1 + \alpha_{2,i}\overrightarrow{f}_2 + \cdots + \alpha_{p,i}\overrightarrow{f}_p$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

Rangeons ces coefficients $\alpha_{i,j}$ sont la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$$

Dans ce rangement, le premier indice du coefficient $\alpha_{i,j}$ correspond au numéro de la ligne et le deuxième au numéro de la colonne contenant ce coefficient. En fait nous **écrivons en colonne les composantes dans $\mathcal{B}_F$ des transformées des vecteurs de la base $\mathcal{B}_E$ de E** : $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \cdots, f(\overrightarrow{e_{n-1}}), f(\overrightarrow{e_n})$. Ce mode de rangement permet de trouver facilement les composantes du vecteur image $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ relative à la base $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$ donnée : l'équation $\overrightarrow{Y} = f(\overrightarrow{X})$ est équivalente à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notons enfin que cette matrice de f ainsi déterminée dépend fortement des bases choisies de E et F. Dans la dernière partie de ce cours, nous regarderons comment trouver de "bonnes bases" afin que l'écriture matricielle de f en soit simplifiée.

La matrice

$$M = Mat_{f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p-1,1} & \alpha_{p-1,2} & \cdots & \alpha_{p-1,n-1} & \alpha_{p-1,n} \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,n-1} & \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$$

est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ et $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_p}\}$.

Rappel : lien matriciel entre les composantes d'un vecteur dans deux bases.
On sait aussi que la relation matricielle qui lie les vecteurs colonne des composantes d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ dans les bases $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_n}'\}$ est

$$X = PX'$$

où X est le vecteur colonne des composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$,

X' le vecteur composantes des composantes de $\overrightarrow{X}$ dans la base $\mathcal{B}'_E = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_n}'\}$ et

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ et $\mathcal{B}'_E = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_n}'\}$, C'est-à-dire $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Notons que $X = PX' \Leftrightarrow P^{-1}X = X'$.

Rappel : lien matriciel entre la matrice M d'une application linéaire $f : E \to F$ dans les bases $\mathcal{B}_E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ et $\mathcal{B}_F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \cdots, \overrightarrow{f_n}\}$ et la matrice M' de cette même application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}'_E = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_n}'\}$ et $\mathcal{B}'_F = \{\overrightarrow{f_1}', \overrightarrow{f_2}', \cdots, \overrightarrow{f_n}'\}$. On a donc

$$M = Mat_{f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}, \quad M' = Mat_{f,\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}$$

qui vérifient la relation matricielle

$$M' = Q^{-1}MP$$

où Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_F$ à la base $\mathcal{B}'_F$ et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_E$ à la base $\mathcal{B}'_E$.