CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 10

Classification des états d'une chaîne de Markov

On se propose d'étudier dans ce chapitre quelques propriétés topologiques des graphes associés à une chaîne de Markov homogène. Le but est de classer, à travers ces propriétés, les chaînes de Markov

1. Communication entre états

1.1. **Etats accessibles à partir d'un état donné.** On considère une chaîne de Markov homogène. L'idée est de regarder, à partir d'un état donné, quels sont les autres états que l'on peut atteindre.

Définition 1. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $E = \{1,\cdots,N\}$. Soient i et j deux états, c'est-à-dire deux éléments de E. On dit que j est accessible à partir de i s'il existe un entier n tel que*

$$q_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j, X_0 = i) > 0.$$

En particulier, un état i est toujours accessible depuis lui même, puisque

$$q_{i,i}^{(0)} = 1.$$

On notera

$$i \longrightarrow j$$

si j est accessible à partir de i. Notons également que $q_{ij}^{(n)} > 0$ s'il existe un chemin

$$i, i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n = j$$

tel que

$$q_{i,i_1} q_{i_1,i_2} \cdots q_{i_{n-1}j} > 0.$$

1.2. **Classes de communication.** On dira que les états i et j communiquent si j est accessible à partir de i et i accessible à partir de j. Dans ce cas on écrira

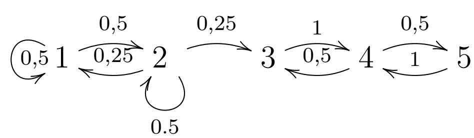
$$i \leftrightarrow j$$

Considérons la relation entre états :

$$\mathcal{R}(i,j) \Leftrightarrow \ i \text{ et } j \ \textit{communiquent}.$$

Cette relation est une relation d'équivalence. Ceci signifie que l'on peut regrouper les éléments de E en paquets, chaque paquet regroupant tous les éléments qui communiquent entre eux. Dans une classe, quels que soient deux éléments pris dans cette classe, ils communiquent. Par contre, deux éléments pris dans des classes distinctes ne communiquent pas. On dit que l'on a fait une partition de E en sous-ensembles disjoints (on a coupé le gateau en morceaux). Ces classes s'appellent les classes de communication.

Exemple 1. Considérons le graphe suivant, associé à une chaîne de Markov homogène dont l'espace des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:



Déterminons les différentes classes de communication. Commençons par celle qui contient 1. On a

$$q_{1,1}^{(1)} = 0,5$$

donc

$$1 \leftrightarrow 1$$

et donc 1 est dans la classe de 1 (mais ceci on le savait). On a aussi

$$q_{1,2}^{(1)} = 0,5, \ q_{2,1}^{(1)} = 0,25$$

donc

$$1 \leftrightarrow 2$$

Remarquons que l'on a aussi

$$q_{1,1}^{(2)} = 0,125, \ q_{2,2}^{(2)} = 0,125.$$

Comme il n'y a pas d'autres états qui communiquent avec 1 et 2, on a déterminé la première classe de communication :

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 2\}.$$

Considérons maintenant un état qui n'est pas dans $\mathcal{C}_1$, par exemple l'état 3. On voit que les états 4 et 5 communiquent avec 3 car

$$q_{3,4}^{(1)} = 1, \ q_{4,3}^{(1)} = 0,5$$

et

$$q_{3,5}^{(2)} = 0,5, \ q_{5,3}^{(2)} = 0,5.$$

Il est évident que 4 et 5 communiquent aussi entre eux. On a donc une deuxième classe de communication

$$\mathcal{C}_2 = \{3, 4, 5\}.$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas de communication entre ces deux classes, par exemple on a $2 \to 3$ mais on n' a pas le chemin inverse. Ainsi, nous avons la partition suivante de E :

$$E = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$$

avec

$$\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2 = \emptyset.$$

Remarquons que nous pouvons également déterminer les classe à partir de la matrice de transition. Ici elle est égale à

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire

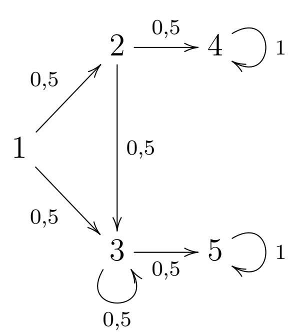
$$\begin{array}{ccccc} 1 \to 1 & 1 \to 2 & & & \\ 2 \to 1 & 2 \to 2 & 2 \to 3 & & \\ & & & 3 \to 4 & \\ & & 4 \to 3 & & 4 \to 5 \\ & & & 5 \to 4 & \end{array}$$

1.3. **Etats et ensemble absorbants.**

Définition 2. *Soit* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ *une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble* $E = \{1, \cdots, N\}$*. Un état* $i \in E$ *est dit absorbant (on dit aussi fermé) si*

$$q_{i,i} = 1.$$

Exemple 2 Considérons la chaîne de Markov homogène dont l'ensemble des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et le graphe



Si $i \neq j$, ces deux états ne peuvent communiquer. On en déduit la partition en classe de communication :

$$E = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2 \bigcup \mathcal{C}_3 \bigcup \mathcal{C}_4 \bigcup \mathcal{C}_5$$

avec

$$\mathcal{C}_1 = \{1\}, \mathcal{C}_2 = \{2\}, \mathcal{C}_3 = \{3\}, \mathcal{C}_4 = \{4\}, \mathcal{C}_5 = \{5\},$$

Cette situation peut aussi se lire sur la matrice de transition qui est égale à

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les puissances de cette matrice sont toutes triangulaires supérieures, c'est-à-dire de la forme

$$Q^k = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

le symbole x signifiant que le coefficient correspondant peut être non nul. On voit donc sur cette matrice que si $i < j$ alors j n'est pas accessible à partir de i. On voit aussi dans cet exemple que les états 4 et 5 sont fermés.

Définition 3. *Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $E = \{1, \cdots, N\}$. Une classe de communication $\mathcal{C}$ est dite fermée si*

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} q_{i,i} = 1.$$

1.4. **Chaîne de Markov homogène absorbante ou transiente.** Nous avons défini un état i absorbant comme un état vérifiant $q_{i,i} = 1$. Il s'en suit, que pour un tel état, on a $q_{i,j} = 0$ dès que $j \neq i$.

Définition 4. *Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $E = \{1, \cdots, N\}$. Elle est dite absorbante s'il existe pour tout état j, un état absorbant i_j que l'on peut atteindre, c'est à dire*

$$q^{(k)}_{j,i_j} > 0, \;\; q_{i_j,i_j} = 1.$$

Une chaîne de Markov homogène qui n'est pas absorbante est dite transiente.

Pour un chaîne de Markov absorbante, il est commode d'écrire la matrice de transition après avoir "réordonné" les états en considérant tout d'abord les états non absorbants et ensuite les états absorbants. Dans ce cas la matrice Q a la forme suivante

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & Id_r \end{pmatrix}$$

où Id_r est la matrice identité d'ordre r si r est le nombre d'états absorbants. Sous cette forme le calcul de Q^n est plus facile à présenter :

$$Q^n = \begin{pmatrix} Q_1^n & Q_2^{(n)} \\ 0 & Id_r \end{pmatrix}$$

1.5. **Chaîne de Markov homogène irréductible (ou ergodique).**

Définition 5. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène. Elle est dite irréductible si elle n'a qu'une seule classe de communication.*

Ceci signifie que quels que soient les états i et j , ces deux états communiquent. et donc la probabilité d'aller de l'un à l'autre est strictement positive. Cette propriété peut donc se lire sur le graphe : chaque paire de points est reliée soit par une flèche, soit par une succession de flèches. Par exemple, s'il existe un état absorbant (fermé), alors la chaîne ne peut être irréductible. Par contre si la matrice de transition Q est régulière, c'est-à-dire s'il existe une puissance Q^k dont tous les éléments sont positifs, alors la chaîne de Markov homogène est irréductible, elle ne contient évidemment qu'une seule classe de communication. Dans ce dernier cas, on peut aller d'un état à un autre en un nombre k fixé de pas. Nous allons les étudier dans le paragraphe suivant.

1.6. **Chaînes de Markov régulière.**

Théorème 1. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène régulière et soit Q sa matrice de transition. Alors*

$$\lim_{k\to+\infty} Q^k = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{pmatrix}$$

avec $w_i > 0$ pour $i = 1, \cdots, N$.

L'interprétation des scalaires w_i est la suivantes : la probabilité que la chaîne de Markov se trouve dans l'état j tend donc vers w_j lorsque le temps tend vers l'infini, indépendamment de l'état de départ. Rappelons que nous avons abordé ce type de chaînes au chapitre précédent. On en déduit le calcul des w_i en considérant les vecteurs propres de la matrice de transition Q, plus précisément :

Proposition 1. *Le vecteur*

$$(w_1, w_2, , \cdots, w_N)$$

est le vecteur propre (à gauche) associé à la valeur propre 1 de la matrice Q, c'est-à-dire

$$(w_1, w_2, , \cdots, w_N) = (w_1, w_2, , \cdots, w_N)Q$$

tel que

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1.$$

Ainsi on retrouve la distribution régulière définie au chapitre précédent.

Remarque : cas ergodique non régulier. Si la matrice Q n'est pas régulière, sa limite peut ne pas exister, la suite des Q^n ne tend en général pas vers une matrice constante. Par exemple, les Q^n peuvent osciller entre plusieurs valeurs. Cependant, on a quand même : il existe un vecteur $(w_1, w_2, , \cdots, w_N)$ tel que $w_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ vérifiant

$$(w_1, w_2, , \cdots, w_N) = (w_1, w_2, , \cdots, w_N)Q$$

2. Les classes ergodiques

2.1. **Une relation d'ordre sur l'ensemble des classes de communication.** Rappelons qu'une relation $\mathcal{R}$ sur en ensemble est une relation d'ordre si elle vérifie les trois propriétés :

(1) La refléxivité : $x\mathcal{R}x$ pour tout x, c'est-à-dire x est en relation avec lui même,

(2) L'antisymétrie : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$

(3) La transitivité : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.

Le prototype des relations d'ordre est la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$. On a bien

(1) $x \leq x$,

(2) Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$

(3) Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Par contre la relation $x < y$ n'est pas d'ordre car on n'a pas $x < x$.

Définition 6. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène . On définit une relation d'ordre, notée $\leq$ sur l'ensemble des classes de communication par :*
$\mathcal{C}_1 \leq \mathcal{C}_2$ si et seulement si de tout état de $\mathcal{C}_2$ on peut atteindre un état (donc tous) de $\mathcal{C}_1$.

On vérifie sans peine que ceci est bien une relation d'ordre.

Exemples

(1) Reprenons l'exemple 1. L'ensemble $\mathcal{C}$ est formé de deus classes

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 2\},\ \mathcal{C}_2 = \{3, 4, 5\}.$$

Comme nous avons en particulier

$$2 \xrightarrow{0,75} 3$$

on peut atteindre la classe $\mathcal{C}_2$ à partir de $\mathcal{C}_1$. Ainsi $\mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1$.

(2) Dans l'exemple 2, nous avions 5 classes : $\mathcal{C}_i = \{i\}$ pour $i = 1, \cdots, 5$. Le graphe permet de voir que

$$\begin{cases} \mathcal{C}_4 = \{4\} \leq \mathcal{C}_2 = \{2\} \leq \mathcal{C}_1 = \{1\} \\ \mathcal{C}_5 = \{5\} \leq \mathcal{C}_3 = \{3\} \leq \mathcal{C}_1 = \{1\} \\ \mathcal{C}_5 = \{5\} \leq \mathcal{C}_3 = \{3\} \leq \mathcal{C}_2 = \{2\} \end{cases}$$

2.2. **Classes de communication ergodiques.**

Définition 7. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène. Un classe de communication $\mathcal{C}$ est dite ergodique si c'est un élément minimal pour la relation d'ordre. Ceci signifie qu'il n'existe aucune classe $\widetilde{\mathcal{C}}$, à part $\mathcal{C}$, telle que*
$$\widetilde{\mathcal{C}} \leq \mathcal{C}.$$

Ainsi, dans une classe ergodique, tous ses éléments sont terminaux : on y aboutit après un certain temps. Par exemple si une classe ergodique $\mathcal{C}$ ne contient qu'un seul élément, $\mathcal{C} = \{k\}$, alors cet élément vérifie
$$q_{k,k} = 1.$$
L'état k est donc fermé (on dit parfois aussi absorbant).

2.3. **Etude des classes ergodiques.** Soit $\mathcal{C}$ une classe de communication. Par définition, si i et j sont deux états distinct de $\mathcal{C}$, ils communiquent et donc il existe un entier n tel que
$$q_{i,j}^{(n)} > 0.$$
Considérons alors le sous-ensemble de $\mathbb{N}$:
$$A_{i,j} = \{n \in \mathbb{N}, n \neq 0, \text{tels que } q_{i,j}^{(n)} > 0\}.$$
Pour bien comprendre cet exemple, considérons l'exemple 1. L'ensemble des états est constitué de deux classes
$$\mathcal{C}_1 = \{1,2\},\ \mathcal{C}_2 = \{3,4,5\}$$
et
$$\mathcal{C}_2 \leq \mathcal{C}_1,$$
la classe $\mathcal{C}_2$ est donc ergodique. On a
$$\begin{array}{llll} q_{3,4} = 1 & q_{3,5} = 0 & q_{3,5}^{(2)} = 1/2 & \\ q_{5,4} = 1 & q_{4,3} = 1/2 & q_{5,3} = 0 & q_{5,3}^{(2)} = 1/2 \end{array}$$
On en déduit pour la classe ergodique :
$$\begin{array}{ll} A_{3,4} = \{1,3,5,\cdots\} & A_{3,3} = \{2,4,6,\cdots\} \\ A_{3,5} = \{2,4,6,\cdots\} & A_{4,4} = \{2,4,6,\cdots\} \\ A_{4,5} = \{1,3,5,\cdots\} & A_{5,5} = \{2,4,6,\cdots\} \end{array}$$
Pour la première classe on a
$$\begin{array}{ll} q_{1,1} = 1/2 & q_{1,2} = 1/2 \\ q_{2,1} = 1/4 & q_{2,2} = 1/2 \end{array}$$
et
$$A_{1,1} = \{1,2,3,\cdots\} \quad A_{1,2} = \{1,2,3,\cdots\} \quad A_{2,2} = \{1,2,3,\cdots\}$$

Proposition 2. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de communication ergodique. Il existe un entier naturel $d_{\mathcal{C}}$ tel que pour tout $i \in \mathcal{C}$ chacun des entiers $n \in A_{i,i}$ est divible par $d_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire, pour tout $n \in A_{i,i}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que*
$$n = d_{\mathcal{C}} n_1.$$

Dans l'exemple précédent, on a

$$d_{\mathcal{C}_2} = 2.$$

Cette proposition précise la longueur des chemins partant de l'état $i \in \mathcal{C}$ et retournant à ce même état. Tous ces chemins ont une longueur qui est un multiple de $d_{\mathcal{C}}$. Dans l'exemple précédent, ils ont tous une longueur paire.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de communication ergodique et soient i, j deux états distincts de cette classe. Il existe un entier $t_{i,j}$:*

$$0 \leq t_{i,j} < d_{\mathcal{C}}$$

tel que pour tout $n \in A_{i,j}$ alors

$$n = kd_{\mathcal{C}} + t_{i,j}.$$

Cette dernière relation est la relation de congruence. Elle signifie que dans la division par $d_{\mathcal{C}}$, tous les éléments de $A_{i,j}$ ont le même reste $t_{i,j}$. Dans l'exemple précédent, on trouve

$$t_{3,4} = 1,\ t_{3,5} = 0,\ t_{4,5} = 1.$$

Tous ces invariants donnent des renseignements sur les chemins à l'intérieur des classes ergodiques. La section suivante donne des renseignements plus précis.

3. Etats récurrents, états stationnaires

Nous allons nous intéresser maintenant aux moyennes de passage à un état donné. Dans toute cette section, on suppose que la chaîne de Markov homogène est irréductible.

3.1. **Définition du temps moyen de passage.**

Définition 8. *Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène irréductible et soient $i, j \in E$ deux états de cette chaîne. On suppose que $X_0 = i$ (on démarre de l'état i).*

(1) On appelle temps de passage de l'état i à l'état j la variable aléatoire

$$T_{i,j} = \inf\{n \geq 1, X_n = j\}.$$

(2) On appelle temps de retour à l'état i l'entier

$$T_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}.$$

Si cet ensemble est vide, c'est-à-dire si on ne repasse plus en i, on posera $T_i = \infty$.

Pour chacune de ces variables aléatoires, leur espérance s'interprète de la façon suivante :

(1) L'espérance $E(T_{i,j})$ est le temps moyen de premier passage à l'état j, partant de i.

(2) L'espérance $E(T_i)$ est le temps moyen de premier retour à l'état i.

3.2. **Calcul du temps de passage pour les chaînes irréductibles.** Soit $T_{i,j}$ le temps de passage de l'état i à l'état j et soit $m_{ij} = E(T_{i,j}$ son espérance, c'est-à-dire le temps moyen. Posons $m_{i,i} = 0$ et notons par M la matrice $(m_{i,j})$. Cette matrice M est en général assez difficile à calculer. Nous allons voir comment contourner ce problème dans le cas des chaînes irréductibles (ou ergodiques). Pour cela commençons par calculer les temps moyens de retour :

$$E(T_i),\ T_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$$

sachant que $X_0 = i$. Posons

$$r_i = E(T_i).$$

Proposition 4. *On a :*

$$r_i = \frac{1}{w_i}$$

où $W = (w_1, \cdots, w_n)$ est la distribution stationnaire.

Nous avons vu que si la distribution irréductible était régulière, la distribution stationnaire définie par $W = WQ$ avait toutes ses composantes strictement positives. Ceci reste encore vrai si la chaîne est irréductible sans condition de régularité. Ceci découle du lemme suivant

Lemme 1. *On a*

(1) $m_{i,j} = 1 + \sum_{l \neq j} q_{i,l} m_{l,j}$

(2) $r_i = 1 + \sum_{l \neq j} q_{i,l} m_{l,i}$.

Considérons les matrices suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N} \\ m_{2,1} & 0 & \cdots & m_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{N,1} & m_{N,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_N \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Des deux identités du lemme ci-dessus, on déduit la relation matricielle

$$M + D = C + QM.$$

Le vecteur W vérifie $WQ = W$ soit $W(Q - Id) = 0$.Or la relation matricielle s'écrit aussi

$$QM - M = (Q - Id)M = C - D.$$

D'où

$$W(Q - Id)M = WC - WD$$

Mais $W(Q - Id) = 0$ et WC est le vecteur $\sum_i w_i, \sum_i w_i, \cdots, \sum_i w_i)$. Mais $\sum_i w_i = 1$, d'où $WC = (1, 1, \cdots, 1)$. Comme $WD = (w_1 r_1, w_2 r_2, \cdots, w_N r_N)$, on a donc

$$0 = (1, 1, \cdots, 1) - (w_1 r_1, w_2 r_2, \cdots, w_N r_N)$$

et donc

$$w_i r_i = 1$$

pour tout $i = 1, \cdots, N$.

Exemple : le modèle d'Erhenfest. Le modèle des urnes est un modèle stochastique introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des « paradoxes » apparus dans les fondements de la mécanique statistique. On considère deux urnes A et B ainsi que N boules, numérotées de 1 à N. Initialement, toutes les boules se trouvent dans l'urne A. On répète alors le processus suivant : " On tire au hasard un numéro i compris entre 1 et N, on prend la boule numéro i et on la transfère dans l'urne où elle n'était pas. Par convention, le premier instant est $t_0 = 0$. On montre que quel que soit le nombre N de boules, les boules reviennent dans l'urne A au bout d'un temps fini. Mais ce temps dépend de N, donc si N est très grand, ces récurrences ne sont pas "visibles". Nous allons étudier ce modèle pour

$$N = 4$$

et que la boule choisie par les autres se fait de manière équiprobable. On note X_k le nombre de boules dans l'urne A à l'instant k, c'est-à-dire au tirage numéro k. L'ensemble des valeurs de X_k est donc

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

La matrice de transition est donc

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe est

$$0 \underset{0,25}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{0,5}{\overset{0,75}{\rightleftarrows}} 2 \underset{0,75}{\overset{0,5}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{0,25}{\rightleftarrows}} 4$$

Ce graphe montre que l'on peut atteindre n'importe quel état à partir de n'importe quel état. La chaîne est donc irréductible. Par contre elle n'est pas régulière. En effet on ne peut aller de l'état 0 à l'état 2 qu'après un nombre pair de pas. Ainsi $q_{0,2}^{(2p+1)} = 0$ quel que soit p. Donc les puissances impaires de Q ne sont pas régulière. De même, on ne peut atteindre l'état 1 à partir de 0 qu'après un nombre impair de pas et donc $q_{0,1}^{(2p)} = 0$ et les puissances paires de Q ne sont pas non plus régulière. Bien qu'elle ne soit pas régulière, cette chaîne de Markov irréductible possède une distribution stationnaire $W = (w_0, \cdots, w_4)$ défini par $W = WQ$ et $w_I > 0, w_0 + \cdots + w_4 = 1$. Le système $W = WQ$ s'écrit

$$\begin{cases} w_0 = 0,25w_1 \\ w_1 = w_0 + 0,5w_2 \\ w_2 = 0,75w_1 + 0,75w_3 \\ w_3 = 0,5w_2 + w_4 \\ w_4 = 0,25w_3 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} w_0 = 0,25w_1 \\ w_2 = 1,5w_1 \\ w_3 = w_1 \\ w_4 = 0,25w_1 \end{cases}$$

et comme

$$1 = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4w_1$$

on a donc $w_1 = 0,25$ d'où

$$W = (1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16).$$

Les temps moyens r_i de premier retour à l'état i sont donc

$$r_0 = 16, r_1 = 4, r_2 = 8/3, r_3 = 4, r_4 = 16.$$

Il nous reste à determiner les temps moyens $m_{i,j} = E(T_{i,j})$ de passage de l'état i à l'état j. Reprenons le calcul matriciel. Nous avons vu l'identité suivante :

$$M + D = C + QM$$

soit

$$(Id - Q)M = C - D.$$

Comme la matrice $Q - Id$ n'est pas inversible (son déterminant est nul), cette équation ne permet pas de trouver directement M.

Lemme 2. *Soit U la matrice*

$$U = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{pmatrix}$$

Alors la matrice

$$Id - Q + U$$

est inversible.

Démonstration. Dire qu'une matrice carrée M est inversible est équivalent à dire que le système linéaire $MX = 0$ où X est un veccteur colonne, n'a pue $X = 0$ comme solution. Considérons donc le système linéaire $(Id - Q - U)X = 0$. Multiplions à gauche par le vecteur ligne W :

$$W(Id - Q + U)X = 0$$

soit

$$(W(Id - Q)X + WUX = 0.$$

Or $W(Id - Q) = 0$, d'où

$$WUX = 0.$$

Du point de vue matriciel cela s'écrit

$$(w_1, \cdots, w_N) \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} = 0.$$

Comme $w_1 + \cdots + w_N = 1$, le calcul WU donne

$$WU = W$$

et donc $WUX = 0$ est équivalent à $WX = 0$ et donc aussi à $UX = 0$. Revenons au système $(Id - Q - U)X = 0$. Il s'écrit

$$(Id - Q)X - UX = 0.$$

Or $UX = 0$, donc le vecteur X satisfait

$$(Id - Q)X = 0$$

soit

$$X = QX$$

soit

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,N} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{N,1} & q_{N,2} & \cdots & q_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Mais Q est une matrice stochastique, la somme des éléments par ligne est égale à 1, on en déduit que X est un vecteur constant. Comme il,vérifie aussi $WX = 0$, on en déduit $X = 0$ et la matrice $Id - Q + U$ est inversible.

Ceci va nous permettre de calculer M. Soit V la matrice inverse de $Id - Q + U$. On a

$$V(Id - Q + U) = Id$$

soit

$$V(Id - Q) = Id - VU.$$

Mais

$$(Id - Q)M = C - D$$

d'où

$$V(Id - Q)M = VC - VD = C - VD$$

car $VC = C$ d'après la definition de C. Calculons différemment $V(Id - Q)$. On a

$$(Id - Q + U)(Id - U) = Id - Q - U + QU + U - U^2 = Id - Q$$

car $QU = U$ et $U^2 = U$. Ainsi

$$M - UM = C - VD.$$

Mais $UM = (w_1, \cdots, w_)M$. Ainsi

$$m_{i,i} = 0 = 1 - z_{i,i}r_i + \sum_j m_{j,i}w_j$$

ce qui donne

$$\sum_j m_{j,i}w_j = z_{i,i}r_i - 1.$$

On en déduit

Proposition 5. *Soit $M = (m_{i,j}$ la matrice des temps moyens de passage de l'état i à l'état j. Alors si $V = (v_{i,j})$ est la matrice inverse de $Id - Q - U)$ avec* $U = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{pmatrix}$ *où $(w_1, \cdots, w_N)$ est la phase stationnaire, alors*

(1) $m_{i,i} = 0$ *pour* $i = 1, \cdots, N$,

(2) $m_{i,j} = (v_{j,j} - v_{i,i})r_j = \dfrac{v_{j,j} - v_{i,i}}{w_j}$.