UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 PC+ SPI+Cycle+CPB2

Mathématiques: ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS

Elisabeth REMM

Chapitre 2

Diagonalisation des endomorphismes et des matrices

Contents

Introduction: Sur les matrices d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Nous avons vu, qu'étant donnée une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E, on associe à f une matrice $M_{f,\mathcal{B}}$ qui se construit en mettant en colonnes les composantes des vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ relatives à la base $\mathcal{B}$. Cette matrice dépend bien entendu du choix de la base $\mathcal{B}$. Si on choisit une autre base $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$, on récupère une autre matrice $M'_{f,\mathcal{B}'}$ qui est liée à $M_{f,\mathcal{B}}$ par la relation

$$M'_{f,\mathcal{B}'} = P^{-1} M_{f,\mathcal{B}} P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ construite en mettant en colonne les composantes des vecteurs de la nouvelle base par rapport à la première base $\mathcal{B}$. Ainsi f est représenté par toute matice M' telle que $M' = P^{-1} M_{f,\mathcal{B}} P$. La question naturelle qui se pose alors est de savoir s'il existe une matrice M', plus simple que la matrice M, permettant de faire des calculs matriciels plus aisés. Un des calculs matriciels important est celui du calcul des puissances de M. Déjà pour des matrices carrées d'ordre 3, les puissances d'ordre 3, 4 et plus posent des problèmes de calcul et même par une approche algorithmique et l'utilisation d'un langage comme PYTHON.

Le but de ce chapitre est de voir comment trouver, lorsque cela est possible, une matrice "simple". C'est cette notion de simplicité que l'on aborde ici.

1. Matrices diagonales et diagonalisables

On notera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices réelles (respectivement complexes) carrées d'ordre n. Pour ne pas différencier (lorsque cela ne sera pas nécessaire) le cas réel du cas complexe, on notera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ cet ensemble où $\mathbb{K}$ représente l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappelons également que si l'on note la matrice à l'aide de ses coefficients, $M = (m_{i,j})$, alors le premier indice est celui du numéro de ligne contenant le coefficient $m_{i,j}$ et le deuxième celui de la colonne.

1.1. **Définition.**

Définition 1. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si elle est de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$.

Ainsi, tous les éléments en dehors de la diagonale principale $\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ sont nuls. Les éléments de la diagonale principale peuvent être nuls ou non. Par exemple, la matrice nulle est diagonale.

Soient

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

(1) la somme $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi diagonale,

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi diagonale. On en déduit, en particulier, que l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On notera par $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ce sous-espace vectoriel.

(3) le produit $M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$ est aussi une matrice diagonale.

1.2. **Matrices diagonalisables.**

Définition 2. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Ceci est équivalent à dire qu'il existe une matrice* **inversible** $P \in GL(n, \mathbb{K})$ *telle que la matrice*

$$M' = P^{-1}MP$$

soit diagonale.

Rappelons que $GL(n, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles. Cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car la somme de deux matrices inversibles n'est pas nécessairement inversible. Par contre, $GL(n, \mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication: le produit de deux matrices inversibles est inversible, ce produit est également associatif ($\forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{K}),\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$), la matrice identité, qui est bien inversible, est l'élément neutre ($\forall A \in GL(n, \mathbb{K}),\ A \cdot Id = Id \cdot A = A$), et toute matrice A inversible admet un symétrique pour cette opération (c'est l'inverse de cette matrice A^{-1}).

Remarque. Contrairement aux matrices diagonales, il n'est pas du tout aisé de reconnaître si une matrice carrée est diagonalisable ou pas. La définition ci-dessus ne nous aide guère pour cela (voir exercice 2). On va donc mettre en évidence quelques propriétés de ces matrices pour caractériser ces matrices.

2. Valeurs propres, polynôme caractéristique d'une matrice carrée

2.1. Valeurs propres d'une matrice carrée.

Définition 3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé valeur propre de M s'il existe un vecteur colonne V à coefficient dans $\mathbb{K}$* **NON NUL***, tel que*
$$M \cdot V = \lambda V.$$

Si V est le vecteur colonne
$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
et si M est la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
alors l'équation
$$M \cdot V = \lambda V$$
s'écrit
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$
C'est donc un système linéaire dont les inconnues sont λ et $x_1, \cdots, x_n$ mais les x_i sont non tous nuls. Ceci en complique la résolution. On va donc caractériser directement les valeurs propres de M pour éviter ce calcul. Soit λ une valeur propre de M. Il existe donc, d'après la définition, un vecteur colonne V non nul tel que
$$M \cdot V = \lambda V.$$
On en déduit
$$M \cdot V - \lambda V = 0_{n\times 1}$$
soit
$$(M - \lambda I_n) \cdot V = 0_{n\times 1}$$
où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } 0_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Comme V est non nul, on en déduit que le noyau de la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas réduit à la matrice nulle $0_{n\times 1} = \overrightarrow{0}$ (vecteur nul de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$) et donc que la matrice $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Ceci se traduit par

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Inversement, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det(M - \lambda I_n) = 0$. Ainsi $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Son noyau n'est donc pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Il existe donc un vecteur colonne V non nul tel que $(M - \lambda I_n) \cdot V = \overrightarrow{0}$ et donc λ est une valeur propre de M.

Théorème 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si et seulement si*

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Exemples.

(1) Soit I_n la matrice identité. Ses valeurs propres sont toutes égales à 1. En effet

$$\det(I_n - \lambda I_n) = 0$$

est équivalent à

$$\det((1 - \lambda)I_n) = (1 - \lambda)^n = 0.$$

(2) Les valeurs propres de la matrice nulle sont toutes nulles. Notons qu'il existe des matrices non nulles dont toutes les valeurs propres sont nulles. Par exemple, soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 = \lambda^2$$

et donc les valeurs propres de la matrice M, qui est non nulle, sont égales à 0.

(3) Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

une matrice diagonale. Ses valeurs propres sont les éléments $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ de la diagonale.

2.2. **Polynôme caractéristique.**

La recherche des valeurs propres de la matrice M se résume donc à résoudre l'équation

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Lorsque l'on développe ce déterminant, on obtient une équation polynomiale de degré n, si n est l'ordre de la matrice M.

Définition 4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme à une indéterminée X de degré n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ donné par*

$$C_M(X) = \det(M - XI_n).$$

Exemple. Soit M la matrice d'ordre 2:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C_M(X) = \det(M - XI_2) = (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a + d)X + (ad - bc).$$

Proposition 1. *Les valeurs propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique $C_M(X)$. Inversement, les racines de $C_M(X)$ sont les valeurs propres de M.*

Comme toute équation polynomiale à coefficients complexes de degré n a toujours n racines, on en déduit:

Proposition 2.
(1) *Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients complexes admet exactement n valeurs propres (distinctes ou confondues).*
(2) *Toute matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels admet au plus n valeurs propres (distinctes ou confondues).*

Notons qu'une matrice carrée réelle peut n'avoir aucune valeur propre. Considérons par exemple la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$C_M(X) = \det(M - XI_2) = X^2 + 1.$$

L'équation $X^2 + 1 = 0$ n'a aucune racine réelle. Ainsi la matrice réelle M n'a aucune valeur propre. Notons que si on considère M comme une matrice complexe, alors

$$X^2 + 1 = 0$$

admet deux racines complexes, à savoir i et $-i$. Ainsi la matrice complexe M d'ordre 2 admet deux valeurs propres.

Le résultat suivant va être fondamental pour la suite.

Théorème 2. *Soient M et M' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors elles ont le même polynôme caractéristique:*

$$C_M(X) = C_{M'}(X).$$

En particulier, elles ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une matrice inversible P telle que $M' = P^{-1}MP$. On peut écrire

$$M' - XI_n = P^{-1}MP - XI_n = P^{-1}MP - XP^{-1}I_nP = P^{-1}(M - XI_n)P.$$

Comme on a en général $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, on en déduit:

$$\begin{aligned} C_{M'}(X) &= \det(M' - XI_n) = \det(P^{-1}(M - XI_n)P) = \det(P^{-1})\det(M - XI_n)\det(P) \\ &= \det(P^{-1})\det(P)C_M(X) = C_M(X) \end{aligned}$$

car $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$.

Définition 5. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de la matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ de M et on notera r_λ l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $C_M(X)$.*

Si r_λ est la multiplicité de la racine λ de l'équation polynomiale

$$C_M(X) = 0.$$

Ceci signifie que l'on peut mettre en facteur $(X - \lambda)^{r_\lambda}$ dans $C_M(X)$ mais pas $(X - \lambda)^{r_\lambda + 1}$. On donnera donc désormais les valeurs propres distinctes avec leur multiplicité.

2.3. **Vecteurs propres, espaces propres.** Soit M une matrice carrée et soit λ une valeur propre de M. D'après la définition d'une valeur propre, il existe un vecteur colonne non nul V tel que $M \cdot V = \lambda V$. Un tel vecteur sera appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Notons également que le vecteur colonne nul, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, vérifie aussi $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mise en garde. Pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$, on a toujours

$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci ne signifie pas que a soit une valeur propre. Pour qu'il en soit ainsi, il faut trouver un vecteur NON NUL V tel que $M \cdot V = \lambda V$.

Définition 6. *Soit λ une valeur propre de la matrice carrée M. On appelle vecteur propre de M associé à λ tout vecteur colonne V vérifie*

$$M \cdot V = \lambda V.$$

Par exemple le vecteur colonne nul est toujours un vecteur propre de λ.

Proposition 3. *Soit λ une valeur propre de M. L'ensemble des vecteurs propres de M associé à cette valeur propre est un espace vectoriel de dimension au moins égale à 1. On l'appelle l'espace propre associé à la valeur propre λ et on le note F_λ.*

Démonstration. La démonstration n'est qu'un simple exercice. Nous en donnons la solution dans les paragraphes suivants, dans l'étude des diagonalisations des endomorphismes.

Si λ est une valeur propre de M, alors

$$\dim F_\lambda \geq 1$$

car il existe toujours un vecteur propre non nul.

Alors

Proposition 4. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit F_λ l'espace propre associé à la valeur propre λ. Alors*

$$1 \leq \dim(F_\lambda) \leq r_\lambda.$$

Ici aussi, la démonstration est faite dans le cadre plus général de la diagonalisation des endomorphismes dans les paragraphes qui suivent.

3. Exemples

3.1. **Une matrice diagonalisable.** On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = \det(M - XI_3) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 2 & 3 \\ 0 & -2-X & 0 \\ 1 & 2 & 1-X \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en développant, par exemple suivant la règle de Sarrus:

$$\begin{aligned} C_M(X) &= (-1-X)(-2-X)(1-X) - 3(-2-X) \\ &= (-2-X)((-1-X)(1-X) - 3) \\ &= (-2-X)(X-2)(X+2) \\ &= -(X-2)(X+2)^2. \end{aligned}$$

(il est préférable de factoriser directement, cela facilite la recherche des racines). On en déduit que les valeurs propres de M sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \text{racine simple} \quad r_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2, & \text{racine double} \quad r_2 = 2. \end{cases}$$

Déterminons une base et la dimension de F_{λ_1}. Comme $r_1 = 1$ et que $1 \leq \dim F_{\lambda_1} \leq r_1$, on a

$$\dim F_{\lambda_1} = 1 = r_1.$$

Cherchons une base. Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - 2I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit $x_2 = 0$ et $x_1 = x_3$. Ainsi les vecteurs de F_{λ_1} sont de la forme $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Une base de cet espace est donnée par

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Déterminons une base et la dimension de F_{λ_2}. Comme $k_1 = 2$ on sait seulement que $1 \leq \dim F_{\lambda_2} \leq 2$. Cherchons donc une base. Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F_{\lambda_2}$. Alors

$$(M + 2I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant qui se réduit à une seule équation

$$\{ \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

On en déduit $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Ainsi les vecteurs de F_{λ_2} sont de la forme

$$V = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c'est à dire que

$$F_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une base de cet espace est donnée par

$$\left\{ V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ainsi la matrice diagonale semblable est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

avec

$$D = P^{-1}MP$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenue à partir des vecteurs V_1, V_2, V_3 des bases trouvées.

3.2. **Une matrice non diagonalisable mais avec n valeurs propres comptées avec leur multiplicité.** Considérons la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = \det(M - XI_3) = \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en développant, par exemple suivant la règle de Sarrus:

$$\begin{aligned} C_M(X) &= (2-X)(1-X)(-X) - 1 + (2-X) \\ &= (1-X)((2-X)(-X)+1 \\ &= (1-X)(X^2-2X+1) \\ &= (1-X)^3. \end{aligned}$$

La matrice M admet donc $\lambda_1 = 1$ comme valeur propre triple. Ainsi, en comptant la multiplicité, on a bien trois valeurs propres. Déterminons la dimension de l'espace propre associé. Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$x_3 = x_1, \ x_2 = -x_1$$

et donc

$$F_{\lambda_1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \ x_1 \in \mathbb{K} \right\}.$$

On a donc

$$\dim F_{\lambda_1} = 1$$

et M n'est pas diagonalisable. On verra que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (**la réciproque est fausse**). Donc, si M était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $M' = Id$ et il existerait une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP = M' = Id$. Mais alors $M = PM'P^{-1} = PIdP^{-1} = Id$. Or $M \neq Id$ donc M n'est pas diagonalisable.

3.3. **Matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.** Considérons la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$C_M(X) = X^2 + 1.$$

Il n'a pas de racine réelle et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si on considère M comme une matrice à coefficients complexes, alors $C_M(X) = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$. Déterminons les espaces propres associés. Soit $v = (x_1, x_2) \in E_{\lambda_1}$. Alors

$$(M - iI_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc le système linéraire suivant:

$$\begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$x_2 = -ix_1$$

la deuxième équation se réduisant alors à $x_1 + i(ix_1) = x_1 - x_1 = 0$. Ainsi

$$F_{\lambda_1} = \left\{ V = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Il est de dimension 1 et a pour base $\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$. Comme λ_2 est conjugué de λ_1 et que la matrice a des coefficients réels, on aura comme base de F_{λ_2} le vecteur $\overline{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. La matrice M est bien diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Elle est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

(On a $D = P^{-1}MP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -I & i \end{pmatrix}.$$

)

4. Une classe de matrices diagonales: les matrices symétriques réelles

4.1. **Matrices symétriques.**

Définition 7. *Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On dit qu'elle est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :*

$$^tA = A.$$

4.2. **Valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.**

Proposition 5. *Toute matrice symétrique réelle d'ordre n admet n valeurs propres distinctes ou confondues.*

Démonstration. Soit M une matrice symétrique réelle. On peut la considérer comme une matrice à coefficients complexes. Son polynôme caractéristique $C_M(X)$ peut être considéré comme un polynôme à coefficients complexes. Il admet donc n racines complexes distinctes ou confondues. Soit λ une racine de $C_M(X)$ dans $\mathbb{C}$. C'est donc une valeur propre de M considérée comme une matrice complexe. Il existe donc un vecteur colonne complexe V on nul, tel que

$$MV = \lambda V.$$

Notons par $\overline{M}$ et $\overline{V}$ les matrices complexes dont les coefficients sont les éléments complexes conjugués de M et V. On a bien, en prenant le conjugué de l'équation ci-dessus:

$$\overline{MV} = \overline{\lambda V}.$$

Comme M est une matrice réelle, alors $\overline{M} = M$ et donc

$$M\overline{V} = \overline{\lambda V}.$$

Calculons de deux façons le produit matriciel $^tV(M\overline{V})$. On a

$$^tV(M\overline{V}) = {}^tVM\overline{V} = {}^tV\overline{\lambda V} = \overline{\lambda}^t V\overline{V}.$$

On a aussi

$$^tV(M\overline{V}) = {}^tV{}^tM\overline{V} = {}^t(MV)\overline{V} = \lambda({}^tV\overline{V}).$$

Ainsi

$$\overline{\lambda}\,{}^tV\overline{V} = \lambda({}^tV\overline{V}).$$

Comme V est non nul, le scalaire $^tV\overline{V}$ est aussi non nul. On en déduit:

$$\overline{\lambda} = \lambda$$

et la valeur propre λ est réelle. D'où le résultat.

4.3. **Diagonalisation des matrices symétriques réelles.**

Théorème 3. *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.*

Démonstration. Ce résultat classique se démontre en général dans le cours d'algèbre bilinéaire.

5. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E.

5.1. **Valeurs propres d'un endomorphisme.**

Définition 8. *On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in E$* **NON NUL***, tel que*

$$f(v) = \lambda v.$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et soit M la matrice de f relative à cette base. Rappelons que les colonnes de M sont les composantes dans $\mathcal{B}$ des images $f(e_1), \cdots, f(e_n)$. Du point de vue matriciel, l'identité $f(v) = \lambda v$ s'écrit

$$M \cdot V = \lambda V$$

où V est le vecteur colonne dont les composantes sont celles de v relatives à la base $\mathcal{B}$. On en déduit que λ est aussi une valeur propre de M.

Proposition 6. *Soit f un endomorphisme de E et soit M la matrice de f relative à une base donnée $\mathcal{B}$ de E. Alors les valeurs propres de f coïncident avec les valeurs propres de M.*

Ceci a bien un sens, car d'après le Théorème 2, les valeurs propres de n'importe quelle matrice de f associée à une base quelconque de E sont les mêmes. On peut même préciser:

Définition 9. *On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ donné par*

$$C_f(X) = C_M(X)$$

où M est la matrice de f relative à une base $\mathcal{B}$ de E donnée.

Conséquence: calcul des valeurs propres de f. Etant donné un endomorphisme de E, pour calculer ses valeurs propres, on se donne une base $\mathcal{B}$ de E, on calcule la matrice M de f relative à cette base et on résoud (comme on peut) l'équation polynomiale

$$C_M(X) = 0.$$

5.2. Espace propre associé à une valeur propre.

Définition 10. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. On appelle vecteur propre de f associé à λ tout vecteur de E qui vérifie*

$$f(v) = \lambda v.$$

Notons que le vecteur nul est toujours un vecteur propre de λ. Mais, d'après la définition d'une valeur propre, il existe toujours un vecteur propre non nul associé à λ.

Proposition 7. *Soit λ une valeur propre de f. L'ensemble des vecteurs propres de f associé à cette valeur propre est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle l'espace propre associé à la valeur propre λ.*

Démonstration. Nous avons vu que le vecteur nul était un vecteur propre associé à λ. Donc l'ensemble des vecteurs propres est non vide. Soient v et v' deux vecteurs propres:

$$f(v) = \lambda v, \quad f(v') = \lambda v'.$$

Alors

$$f(v + v') = f(v) + f(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v + v').$$

Ainsi $v + v'$ est aussi vecteur propre associé à λ. Soit $a \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors

$$f(av) = af(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

et av est aussi vecteur propre. On en déduit que l'ensemble des vecteurs propres de f associé à λ est un sous-espace vectoriel de E.

Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme f de E, on notera par E_λ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5.3. Détermination des espaces propres.

Théorème 4. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. Alors l'espace propre E_λ associé coïncide avec le noyau*

$$\ker(f - \lambda I_E)$$

de l'endomorphimse $f - \lambda I_E$ où I_E désigne l'endomorphisme identité de E.

Conséquence: détermination pratique de E_λ. Donnons nous une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E. Considérons la matrice M de f relative à cette base. Soit $v = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur de E. C'est un vecteur propre associé à λ si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n)$ sont solutions du système linéaire

$$(1) \qquad (A-\lambda I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme λ est une valeur propre, ce système a au moins une solution non nulle.

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Commençons par déterminer les valeurs propres. Le polynôme caractéristique de f est

$$\begin{aligned} c_f(X) &= c_M(X) = det(M - XId_n) = det \begin{pmatrix} -3-X & 2 & 4 \\ -2 & 1-X & 4 \\ -2 & 2 & 3-X \end{pmatrix} \\ &= (-3-X)[(1-X)(3-X)-8] - 2(-2(3-X)+8] + 4(-4+2(1-X)) \\ &= (-3-X)[X^2-4X-5] - 4 - 4X - 8 - 8X \\ &= -X^3 + X^2 + 5X + 3 \\ &= (X+1)(-X^2+2X+3) \text{ car } -1 \text{ est racine} \\ &= -(X+1)^2(X-3) \text{ avec le discriminant ou en remarquant que } -1 \text{ est racine} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f dont les racines de $c_f(X)$ donc mes valeurs propres de f sont

$\lambda_1 = -1$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ de multiplicité $r_1 = 1$.

Déterminons l'espace propre $E_{\lambda_1=-1} = Ker(f - \lambda_1 Id) = Ker(f + Id)$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$:

Soit un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E_{\lambda_1} = Ker(f+Id) \quad &\Leftrightarrow (M+Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow -2x + 2y + 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y - 2z = 0 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1=-1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x - y - 2z = 0\} = \{(y+2z, y, z); y, z\mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0) + z(2,0,1)\, y, z \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1)\} \end{aligned}$$

La famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=-1}$ et c'est aussi une famille libre (vecteurs non colinéaires) donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de $E_{\lambda_1=-1}$ et $\dim E_{\lambda_1=-1} = 2$

Déterminons l'espace propre $E_{\lambda_2=3} = Ker(f - \lambda_2 Id) = Ker(f - 3Id)$ associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$:

Soit un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_{\lambda_2=3} = Ker(f-3Id) \ &\Leftrightarrow (M-3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y+4z=0 \\ -2x-2y+4z=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ -4x+4z=0 \\ -4x+4z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x=y=z
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2=3} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x=y=z\} = \{(x,x,x); x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,1,1)x \in \mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_3 = (1,1,1)\}
\end{aligned}$$

La famille $\{v_3\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=3}$ et c'est aussi une famille libre (vecteurs non nul) donc $\{v_3\}$ est une base de $E_{\lambda_1=3}$ et $\dim E_{\lambda_1=3} = 1$.

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commençons par déterminer les valeurs propres. Le polynôme caractéristique de f est

$$\begin{aligned}
c_f(X) &= c_M(X) = det(M - XId_n) = det\begin{pmatrix} -8-X & 1 & 5 \\ 2 & -3-X & -1 \\ -4 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} -4-X & 0 & 4+X \\ 2 & -3-X & -1 \\ -4 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \quad \text{en remplaccant } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \\
&= (4+X)det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3-X & -1 \\ -4 & 1 & 1-X \end{pmatrix} \quad \text{en factorisant par } X+4 \\
&= (4+X)det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3-X & 1 \\ -4 & 1 & -3-X \end{pmatrix} \text{en remplaccant } C_3 \text{ par } C_3 - C_1 \\
&= -(X+4)[(3+X)^2-1] = -(X+4)(3+X-1)(3+X+1) \\
&= (X+4)^2(X+2)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f dont les racines de $c_f(X)$ donc mes valeurs propres de f sont $\lambda_1 = -4$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité $r_2 = 1$.

Déterminons l'espace propre $E_{\lambda_1=-4} = Ker(f-\lambda_1 Id) = Ker(f+4Id)$ associé à la valeur propre $\lambda_1=-4$:

Soit un vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in E_{\lambda_1}=Ker(f+4Id) &\Leftrightarrow (M+4Id)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & -1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+y+5z=0\\ \quad 2x+y-z=0\\ -4x+y+5z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y-4x+5z=0\\ \quad 6x-6z=0 \quad (L_2-L_1)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z=x\\ y=-x\end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1=-4} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\, x=z=-y\} = \{(x,-x,x); x\in\mathbb{R}\}\\
&= \{x(1,-1,1)\, x\in\mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1=(1,-1,1)\}
\end{aligned}$$

La famille $\{v_1\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=-4}$ et c'est aussi une famille libre ($v_1\neq\overrightarrow{0}$) donc $\{v_1\}$ est une base de $E_{\lambda_1=-4}$ et $\dim E_{\lambda_1=-4}=1$

Déterminons l'espace propre $E_{\lambda_2=-2} = Ker(f-\lambda_2 Id) = Ker(f+2Id)$ associé à la valeur propre $\lambda_1=-2$:

Soit un vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in E_{\lambda_2}=Ker(f+2Id) &\Leftrightarrow (M+2Id)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -1\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+y+5z=0\\ \quad 2x-y-z=0\\ -4x+y+3z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y-6x+5z=0\\ \quad -4x+4z=0 \quad (L_2+L_1)\\ \quad 2x-2z=0 \quad (L_3-L_1)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z=x\\ y=x\end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1=-2} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\, x=z=y\} = \{(x,x,x); x\in\mathbb{R}\}\\
&= \{x(1,1,1)\, x\in\mathbb{R}\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_2=(1,1,1)\}
\end{aligned}$$

La famille $\{v_2\}$ est une famille génératrice de $E_{\lambda_1=-2}$ et c'est aussi une famille libre ($v_2\neq\overrightarrow{0}$) donc $\{v_2\}$ est une base de $E_{\lambda_1=-2}$ et $\dim E_{\lambda_1=-2}=1$

Remarquons que la restriction de f à l'espace propre de f associé à λ est un endomorphisme de cet espace dont la matrice dans n'importe quelle base de E_λ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_p$$

où p désigne la dimension de E_λ. Cette dimension se détermine lors de la rśolution du système linéaire (1). Toutefois nous avons quelques informations sur cette dimension. Nous avons vu qu'elle est toujours supérieure ou égale à 1. Le résultat suivant donne une majoration de cette dimension:

Proposition 8. *Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme f de E. Soit r_λ la multiplicité de λ comme racine du polynôme carsctéristique $C_f(X)$. Alors*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq r_\lambda.$$

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$C_f(X) = (X-\lambda)^{r_\lambda} Q(X)$$

où $Q(X)$ est un polynôme de degré $(n - r_\lambda)$ tel que

$$Q(\lambda) \neq 0.$$

Supposons

$$\dim E_\lambda = k > r_\lambda.$$

Soit $\{v_1, \cdots, v_k\}$ une base de E_λ et complétons la en une base

$$\{v_1, \cdots, v_k, e_{k+1}, \cdots, e_n\}$$

de E. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}$$

où la notation $\star$ signifie que l'on ne sait rien sur le coefficient sous-jacent. On en déduit:

$$\det(M - XI_n) = (\lambda - X)^k R(X)$$

où $R(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ainsi λ est une racine d'ordre suppŕieure ou égale à k ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire 1. *Soit λ une valeur propre simple de l'endomorphisme f, c'est-à-dire racine d'ordre 1 du polynôme caractéristique $C_f(X)$. Alors*

$$\dim E_\lambda = 1.$$

6. Critère de diagonalisation

6.1. **Une propriété des sous-espaces propres d'un endomorphisme.**

Proposition 9. *Soit f un endomorphisme de E et soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Alors*
$$E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Démonstration. En effet soit $v \in E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2}$. Il vérifie
$$f(v) = \lambda_1 v \text{ et } f(v) = \lambda_2 v.$$
Ainsi
$$\overrightarrow{0} = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v.$$
Comme par hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $v = \overrightarrow{0}$ et donc
$$E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Corollaire 2. *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f. Alors*
$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$$
est bien définie et forme un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Rappelons que dire que les sous-espaces E_{λ_i}, $i = 1, \cdots, k$ sont en somme directe signifie que tout vecteur non nul de E_{λ_i} ne peut s'écrire comme une somme de vecteurs appartenant aux autres E_{λ_j}, $j \neq i$. Nous allons montrer ce corollaire en faisant une récurrence sur le nombre de sous-espaces propres utilisés. Si $p = 2$, on considère deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. D'après la proposition précédente, $E_{\lambda_1} \bigcap E_{\lambda_2} = \{\overrightarrow{0}\}$ et donc la somme de ces deux sous-espaces est directe: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ est un sous-espace de E. Soit p tel que $2 < p \leq k-1$. Supposons que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p}$ soit directe: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est un sous-espace de E. Considérons la somme
$$(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) + E_{\lambda_{p+1}}.$$
Soit $v \in (E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}) \bigcap E_{\lambda_{p+1}}$. Il vérifie
$$f(v) = \lambda_{p+1} v$$
et
$$v = v_1 + v_2 + \cdots v_p, \quad v_i \in E_{\lambda_i}.$$
Donc
$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$
et
$$f(v) = \lambda_{p+1}(v_1 + v_2 + \cdots v_p).$$
On en déduit
$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p = 0.$$

Comme la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est directe, le vecteur nul n'a que des composantes nulles et donc $\lambda_i - \lambda_{p+1} = 0$ ce qui est contraire à l'hypoyhèse.

6.2. **Endomorphismes diagonalisables.** Soit f un endomorphisme diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ telle que la matrice M de f relative à cette base soit une matrice diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ii} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \cdots, n$. Ceci est équivalent à dire que les vecteurs de base vérifient

$$f(v_i) = a_{ii} v_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Ainsi v_i est un vecteur propre associé à la valeur propre a_{ii}. Le polynôme caractéristique de f s'écrit:

$$C_f(X) = (-1)^n (X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn}).$$

En regroupant les valeurs propres égales, on peut l'écrire sous la forme

$$C_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} (X - \lambda_2)^{r_2} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$. Ainsi $C_f(X)$ admet n valeurs propres distinctes ou confondues, soit

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n.$$

(Notons que cette condition est toujours réalisée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais pas toujours lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Nous pouvons également réordonner les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$ de manière à avoir

$$\begin{array}{l} a_{11} = \cdots = a_{r_1 r_1} = \lambda_1 \\ a_{r_1+1, r_1+1} = \cdots = a_{r_1+r_2, r_1+r_2} = \lambda_2 \\ \cdots \\ a_{r_1+r_2+\cdots+r_{p-1}+1, r_1+r_2+\cdots+r_{p-1}+1} = \cdots = a_{n,n} = \lambda_p. \end{array}$$

Ainsi $\{v_1, \cdots, v_{r_1}\}$ sont des vecteurs propres indépendants appartenant au sous-espace propre E_{λ_1}. On en déduit

$$\dim E_{\lambda_1} = r_1$$

et de même

$$\dim E_{\lambda_i} = r_i, \quad i = 1, \cdots, p.$$

On a donc montrer, compte tenu du Corollaire 1,

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

c'est-à-dire les sous-espaces propres sont supplémentaires. La réciproque de ce résultat étant facile à établir, on a donc

Théorème 5. *Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de multilplicités respectives $\{r_1, \cdots, r_p\}$. Alors f est diagonalisale si et seulement si*

(1)

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = n$$

(c'est-à-dire que f possède n valeurs propres distinctes ou confondues,

(2) *pour chacun des E_{λ_i} on a*

$$dim(E_{\lambda_i}) = r_i$$

(c'est-à-dire que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est de dimension $\sum_1^p r_i$.

Ainsi avec ces deux conditions, on a $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$ et donc une concaténation des bases des E_{λ_i} donne une base de E qui n'est formée que de vecteurs propres et dans cette base, la matrice de f est diagonale.

Exemples.

1) Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a trouvé que les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = -1$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_1 = 3$ de multiplicité $r_2 = 1$ et que les espaces propres vérifient $\dim(E_{\lambda_1=-1}) = 2$ avec pour base $\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1)\}$ et $\dim(E_{\lambda_2=3}) = 1$ avec pour base $\{v_3 = (1,1,1)\}$. D'après le critère de diagonalisation, f est bien diagonalisable puisque

$$\begin{array}{l} 1)\ \sum_{i=1}^{2} = r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \\ 2)\ \dim(E_{\lambda_1=-1}) = 2 = r_1 \text{ et } \dim(E_{\lambda_2=3}) = 1 = r_2 \end{array}$$

'Mais sous quelle forme? La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car

$$detP = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times (0-1) - 1 \times (2-1) = -2 \neq 0$$

On a $P^{-1} = \frac{1}{det(P)}\,{}^t(ComP)$. Comme

$$ComP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans cette base $\mathcal{B}$ la matrice de f est

$$\begin{aligned} M' = \quad & M_{f,\mathcal{B}} = P^{-1}MP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc f est diagonalisable. On aurait pu trouver la matrice M' directement avec la définition de $M_{f,\mathcal{B}}$ puisque les colonnes de cette matrice sont les composantes de $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, donc

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

puisque $f(v_1) \in E_{\lambda_1=-1}$ c'est-à-dire $f(v_1) = -v_1$; $f(v_2) \in E_{\lambda_1=-1}$ c'est-à-dire $f(v_2) = -v_2$ et $f(v_3) \in E_{\lambda_2=3}$ c'est-à-dire $f(v_3) = 3v_3$.

Si on prend $\mathcal{B}' = v_3, v_1, v_2$, on obtiendra

$$M_{f,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a trouvé que les valeurs propres de f sont $\lambda_1 = -4$ de multiplicité $r_1 = 2$ et $\lambda_1 = -2$ de multiplicité $r_2 = 1$ et que $\dim(E_{\lambda_1=-4}) = 1 \neq 2$ (avec pour base $\{v_1 = (1, -1, 1)\}$). Ainsi f n'est donc pas diagonalisable puisque le deuxième point du critère de diagonalisation n'est pas vérifié.

3) Prenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ de matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f est

$$C_f(X) = det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{pmatrix} = X^2 + 1.$$

Les valeurs propres de $f \in End(\mathbb{R}^2)$ sont les racines de $c_f(X)$ dans $\mathbb{R}$ donc il n'y a pas de valeur propre car $c_f(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. Ainsi le premier point du critère n'est pas vérifié ($\sum_{i=1}^{0} r_i = 0 \neq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$) et l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

4) Prenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^2$ de matrice relative à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de f est

$$C_f(X) = X^2 + 1 \text{ (le calcul est le identique au cas dans } \mathbb{R})$$

Les valeurs propres de $f \in End(\mathbb{C}^2)$ sont les racines de $c_f(X)$ dans $\mathbb{C}$ donc $\lambda_1 = i$ est valeur propre de f de multiplicité $r_1 = 1$ et $\lambda_2 = -i$ est valeur propre de f de multiplicité $r_2 = 1$. Ainsi le premier point du critère de diagonalisation est vérifié ($\sum_{i=1}^{2} r_i = 2 \neq \dim(\mathbb{C}^2) = 2$). De plus on sait que $1 \leq \dim E_{\lambda_1}$ r_1 d'où $\dim E_{\lambda_1} = 1 = r_1$ et de même on montre que $\dim E_{\lambda_2} = 1 = r_2$. Ainsi le deuxième point du critère de diagonalisation est également vérifié. Ainsi f est diagonalisable.

Sous quel forme? Comme E_{λ_1} est de dimension 1, il existe un vecteur non nul v_1 tel que $E_{\lambda_1} = Vect_{\mathbb{C}} v_1$. De même il existe un vecteur non nul v_2 tel que $E_{\lambda_2} = Vect_{\mathbb{C}} v_2$. Alors dans la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ la matrice de f s'écrit

$$M' = P^{-1}MP \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$..

Remarquons aussi que si $v_1 = (a, b)$ on peut prendre $v_2 = (\bar{a}, \bar{b})$ car

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

implique que

$$\overline{M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \overline{i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}$$

donc $v_2 = (\overline{a}, \overline{b})$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-i$.

6.3. **Critère de diagonalisation.** Le théorème précédent peut s'écrire sous la façon suivante, que l'on retiendra comme un critère de diagonalisation des matrices carrées.

Théorème 6. Critère de diagonalisation des matrices carrées. *Soit M une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M est diagonalisable, si et seulement si*

(1) *M admet n valeurs propres distinctes ou confondues, ce qui est équivalent à dire que le polynôme caractéristique admet la factorisation*

$$C_M(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_p)^{r_p}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_p$ et $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$.

(2) $\dim F_{\lambda_i} = r_i, \quad i = 1, \cdots, p.$

Ainsi, si ces deux conditions sont remplies, il existe une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$ s'écrive

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

les valeurs propres égales étant regroupées. Le premier bloc diagonal est d'ordre r_1, le deuxième d'ordre r_2 ainsi de suite. Sous cette forme, la matrice P est constituée dans l'ordre d'une base de E_{λ_1}, d'une base de E_{λ_2} et d'une base de E_{λ_p}, bases qu'il faudra déterminer.

En effet toute matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'interpréter comme la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi

V est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si $v = {}^tV$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

ce qui explique le théorème de diagonalisation des matrices.