UNIVERSITE de HAUTE ALSACE - FACULTE DES SCIENCES et TECHNIQUES

Licence 2 Mathématiques et Informatique

Mathématiques : COMPLEMENTS ALGEBRE LINEAIRE

Elisabeth REMM

Chapitre 4

Les espaces vectoriels euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Table des matières

Nous allons nous intéresser ici à la géométrie vectorielle et euclidienne du plan et de l'espace.

Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. De plus on a $\det M_{\{e_1,e_2\}}(e_1, e_2) = 1$.

Soit une base orthonormée $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. On dira que la base $\mathcal{B}'$ est une **base orthonormée directe de** $\mathbb{R}^2$ si $\det M_{\{e_1,e_2\}}(v_1, v_2) = 1$ et que $\mathcal{B}'$ est une **base orthonormée indirecte** si $\det M_{\{e_1,e_2\}}(v_1, v_2) = -1$.

On peut faire de même dans $\mathbb{R}^3$: la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ vérifie en plus d'être une base orthonormée : $\det M_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Soit une base orthonormée $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. On dira que la base $\mathcal{B}'$ est une **base orthonormée directe** de $\mathbb{R}^3$ si $\det M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = 1$ et la base $\mathcal{B}'$ est **une base orthonormée indirecte** si $\det M_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = -1$.

1. Le plan euclidien

On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique : si $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2)$ sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire est

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

et la base canonique $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ est une base orthonormée (directe).

1.1. **Interprétation géométrique du déterminant.** Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^2$. La matrice associée à ce couple de vecteurs est la matrice $M = Mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ obtenue en mettant en colonne les composantes de ces vecteurs :

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Par définition, le déterminant de cette matrice est le scalaire

$$\det M = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Nous savons, depuis le cours de première année, que la famille $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le déterminant $\det M$ est non nul. Nous allons retrouver ce résultat dans l'interprétation géométrique de ce déterminant.

Considérons le plan euclidien, sa base canonique, et les deux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ représentés classiquement par le graphe de la Figure 1.

Considérons le parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont supportés par les vecteurs donnés. Son aire est égale à $AB \times CI$. Si $\overrightarrow{Z}$ est le vecteur $\overrightarrow{Z} = (-y_2, y_1)$, alors

$$\overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{Z} = 0, \ \det M = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z}.$$

Mais $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Z} = ||\overrightarrow{X}|| \, ||\overrightarrow{Z}|| \cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z})$. Comme

$$\cos(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z}) = \cos((\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) + \pi/2) = -\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}),$$

nous obtenons

$$\det M = -||\overrightarrow{X}|| \, ||\overrightarrow{Y}|| \sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$$

et donc

$$|\det M| = AB \times CD \times |\sin(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})| = AB \times CI.$$

Ainsi

Proposition 1. *Le déterminant de deux vecteurs exprimés dans une base orthonormée est égal, en valeur absolue, à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.*

1.2. **Projection orthogonale.** Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 1. Si $\overrightarrow{v_1} = (a, b)$ en est une base, l'équation linéaire définissant cette droite s'obtient en écrivant que tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$: $\overrightarrow{X} = \lambda \overrightarrow{v_1}$ soit $(x_1, x_2) = \lambda(a, b)$. Ainsi, nous avons un système d' équations paramétriques de $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a \\ x_2 = \lambda b \end{cases}$$

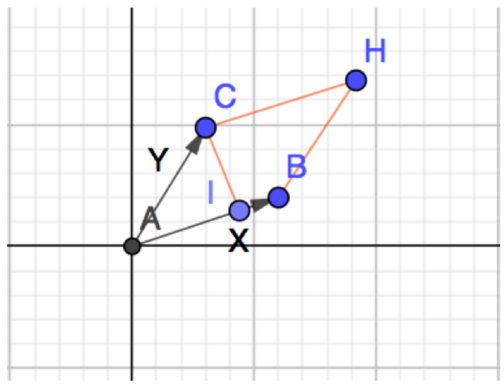

FIGURE 1. Parallélogramme construit sur deux vecteurs.

Une équation linéaire s'obtient en éliminant le paramètre λ entre ces deux équations : Supposons $a \neq 0$. Alors $\lambda = x_1 a^{-1}$ d'où $x_2 = x_1 a^{-1} b$ et donc

$$a^{-1} b x_1 - x_2 = 0$$

ou bien, après multiplication par a

$$b x_1 - a x_2 = 0.$$

Cette équation cartésienne de $\mathcal{D}$ s'interprète donc en disant que tout vecteur $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{D}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$ qui est une base de $\mathcal{D}^{\perp}$. Si $a = 0$, alors une équation de $\mathcal{D}$ se résume à $x_1 = 0$. Revenons au cas $a \neq 0$. D'après le calcul que nous venons de faire, une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}^{\perp}$ orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ est

$$a x_1 + b x_2 = 0.$$

Une base est donnée par le vecteur $\overrightarrow{v_2} = (b, -a)$. Soit $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2$. Déterminons le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$. Pour cela nous devons calculer les composantes x_1', x_2' de $\overrightarrow{X}$ relative à la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

$$\overrightarrow{X} = x_1' \overrightarrow{v_1} + x_2' \overrightarrow{v_2} = (a x_1' + b x_2') \overrightarrow{e_1} + (b x_1' - a x_2') \overrightarrow{e_2} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2}.$$

Ainsi

$$\begin{cases} x_1 = ax'_1 + bx'_2 \\ x_2 = bx'_1 - ax'_2 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{a}{a^2+b^2}x_1 + \dfrac{b}{a^2+b^2}x_2 \\ x'_2 = \dfrac{b}{a^2+b^2}x_1 - \dfrac{a}{a^2+b^2}x_2. \end{cases}$$

Nous en déduisons que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{X}$ sur $\mathcal{D}$, qui est le vecteur $x'_1\overrightarrow{v_1}$, a pour composante dans la base canonique

$$p_{\mathcal{D}}(x_1,x_2) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}x_1 + \frac{b}{a^2+b^2}x_2\right)(a,b).$$

On retrouve aussi

$$p_{\mathcal{D}}(x_1,x_2) = \frac{(x_1,x_2)\cdot(a,b)}{||(a,b)||^2}(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}x_1 + \frac{b}{a^2+b^2}x_2\right)(a,b)$$

puisque dans la base orthonormée

$$\left\{\overrightarrow{u_1} = \frac{(a,b)}{||(a,b)||^2}, \overrightarrow{u_2} = \frac{(b,-a)}{||(b,-a)||^2}\right\} = \left\{\overrightarrow{u_1} = \frac{(a,b)}{a^2+b^2}, \overrightarrow{u_2} = \frac{(b,-a)}{a^2+b^2}\right\}$$

un vecteur $\overrightarrow{X} = (x,y)$ s'écrit

$$\overrightarrow{X} = \frac{\overrightarrow{X}\cdot(a,b)}{a^2+b^2}(a,b) + \frac{\overrightarrow{X}\cdot(-b,a)}{a^2+b^2}(b,-a)$$

et

$$p_{\mathcal{D}}(\overrightarrow{X}) = \frac{\overrightarrow{X}\cdot(a,b)}{a^2+b^2}(a,b) = \frac{x_1a + x_2b}{a^2+b^2}(a,b).$$

On a aussi

$$p_{\mathcal{D}^\perp}(\overrightarrow{X}) = \frac{\overrightarrow{X}\cdot(b,-a)}{a^2+b^2}(b,-a) = \frac{x_1b - x_2a}{a^2+b^2}(b,-a).$$

1.3. **Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$.** Une isométrie du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme vérifiant

$$f(\overrightarrow{X})\cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}$$

pour fous $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de $\mathbb{R}^2$. En particulier une isométrie transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée, ce qui implique qu'une isométrie est bijective. Soit $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ la base canonique. Elle est orthonormée. Nous en déduisons que la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Posons

$$f(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2},\ f(\overrightarrow{e_2}) = c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}.$$

La matrice de f relative à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Comme $\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})\}$ est une base orthonormée, nous en déduisons le système algébrique

$$\begin{cases} a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \\ ac+bd &= 0. \end{cases}$$

Comme $a^2+b^2=1$, nous pouvons poser

$$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta.$$

La troisième relation s'écrit alors $c\cos\theta + d\sin\theta = 0$ et de la deuxième relation nous déduisons qu'il existe $\lambda = \pm 1$ tel que

$$c=-\lambda\sin\theta,\ d=\lambda\cos\theta.$$

(1) Prenons $\lambda = 1$. **La matrice de l'isométrie f relative à la base canonique est donc**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et f est donc une rotation vectorielle (de centre le point O) et d'angle θ.

(2) Prenons $\lambda = -1$. **La matrice de l'isométrie f relative à la base canonique est donc**

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

et f est donc une symétrie orthogonale d'axe la droite vectorielle $\mathcal{D}$ ayant pour base le vecteur

$$\overrightarrow{v_1} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

On a bien

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

d' où $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$. Soit $v_2 = (\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2})$. Alors on a $\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0$ donc $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est une base orthogonale et puisque $||\overrightarrow{v_1}|| = 1 = ||\overrightarrow{v_2}||$ cette base est orthonormée. On a aussi

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

d'où $f(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_2}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ est donc

$$M' = Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2. *Toute isométrie (vectorielle) du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est soit une rotation de centre O, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.*

Reconnaître une isométrie de $\mathbb{R}^2$.

Etant donnée la matrice $M = M_{f,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il faut pouvoir

(1) déterminer si f est une isométrie : pour cela il suffit de calculer $detM = detM_{f,\mathcal{B}}$. Si $detM = \pm 1$ alors f est une isométrie. Si $detM \neq \pm 1$ alors f n'est pas une isométrie.

(2) Si f est une isométrie, quel type d'isométrie est-ce, c'est-à-dire une rotation (et on déterminera alors l'angle θ) ou bien une symétrie orthogonale (et on détermine alors l'axe).

(a) Si $\det M = 1$ alors f est une rotation d'angle θ que l'on trouve à partir de la connaissance de $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$. (dans $\mathbb{R}^2$ on peut directement "lire" le cosinus et le sinus de θ dans M ; ce ne sera pas le cas dans $\mathbb{R}^3$).

(b) Si $\det M = -1$ alors f est une symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_1}\}$. On peut trouver un vecteur v_1 qui convient en déterminant les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(v) = v$. On a $\mathcal{D} = \{v \in \mathbb{R}^2;\ f(v) = v\} = Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_1}\}$ avec $||v_1|| = 1$. On en déduit $\mathcal{D}^{\perp} = Vect_{\mathbb{R}}\{\overrightarrow{v_2} = (-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})\}$.

2. La géométrie euclidienne de $\mathbb{R}^3$

2.1. **Vecteur normal à un plan, produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.** Nous pouvons toujours ramener la définition d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ comme le sous-espace vectoriel constitué des éléments $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant une équation linéaire

$$ax_1 + bx_2 = cx_3 = 0,$$

avec $(a, b, c) \neq 0$. Cette équation n'est unique qu'à un coefficient multiplicatif près. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A} = (a, b, c)$ défini par cette équation. Alors l'équation linéaire n'est rien d'autre que

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Les éléments du plan vectoriel apparaissent comme les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{A}$. Ce vecteur $\overrightarrow{A}$ s'appelle un vecteur normal du plan, tout autre vecteur normal s'écrit $\lambda\overrightarrow{A}$ avec $\lambda \neq 0$.

Détermination d'un vecteur normal à un plan : le produit vectoriel. Supposons que nous connaissions une base $\{\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)\}$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Un vecteur normal à ce plan vectoriel $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{X}$ et à $\overrightarrow{Y}$. Considérons le vecteur $\overrightarrow{A}$ de composante $(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$. On vérifie aisément que

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = 0,\ \overrightarrow{Y} \cdot \overrightarrow{A} = 0.$$

Vérifions uniquement la première identité :

$$\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{A} = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = 0.$$

Ainsi ce vecteur $\overrightarrow{A}$ est un vecteur normal au plan de base $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\}$.

Définition 1. *Soient $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est le vecteur de composantes*

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nous avons démontré ci-dessus la propriété suivante

Proposition 3. *Si les vecteurs $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ sont linéairement indépendants, alors $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ est orthogonal au plan engendré par $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. C'est donc un vecteur normal à de ce plan.*

Nous en déduisons aussi

Corollaire 1. *Les deux vecteurs* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ *sont linéairement indépendants si et seulement si* $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} \neq \overrightarrow{0}$.

Démonstration. En effet, si $\overrightarrow{Y} = \lambda \overrightarrow{X}$, alors si nous calculons $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}$ nous trouvons bien le vecteur nul.

Lemme 1. *Pour tout* $\overrightarrow{X}$ *et* $\overrightarrow{Y}$ *dans* $\mathbb{R}^3$, *on a*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2.$$

Démonstration. En effet

$$\begin{array}{rcl} ||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 & = & (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ & = & x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ & & -2(x_2y_2x_3y_3 + x_1y_1x_3y_3 + x_1y_1x_2y_2) \end{array}$$

On a aussi

$$\begin{array}{rcl} ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2 & = & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ & & -2(x_1y_1x_2y_2 + x_1y_1x_3y_3 + x_2y_2x_3y_3) \\ & = & x_1^2(y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 + y_3^2) + x_3^2(y_1^2 + y_2^2) \\ & & -2(x_1y_1x_2y_2 + x_1y_1x_3y_3 + x_2y_2x_3y_3) \end{array}$$

d'où l'égalité

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2.$$

Nous en déduisons

$$\frac{||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} + \frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1.$$

Or

$$\frac{(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = \cos^2\theta$$

où θ est l'angle $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$. Ainsi

$$\frac{||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}||^2}{||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2} = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

On en déduit

Proposition 4. *Soient* $\overrightarrow{X}$ *et* $\overrightarrow{Y}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *alors*

$$||\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}|| = ||\overrightarrow{X}||||\overrightarrow{Y}|| \mid \sin\theta \mid$$

où θ *est l'angle* $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$.

Sur la base canonique, le produit vectoriel se comporte ainsi :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}, & \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}, \\ \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}, & \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}. \end{array}$$

Nous en déduisons les **propriétés algébriques du produit vectoriel** :

pour tout $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \in \mathbb{R}^3$

(1) $\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = -\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{X}$,

(2) $\overrightarrow{X} \wedge (a\overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{Z}) = a\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} + b\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Z}$,

(3) $(\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \wedge \overrightarrow{Z} + (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \wedge \overrightarrow{X} + (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \wedge \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{0}$.

La dernière identité montre que le produit vectoriel n'est pas une opération associative.

2.2. **Le déterminant et le produit vectoriel.** Rappelons que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

son déterminant se calcule, par exemple, à l'aide de la règle de Sarrus

$$\begin{aligned} \det A = \ & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} \\ & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \end{aligned}$$

et nous savons que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de la matrice A est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{1,1} & -A_{2,1} & A_{3,1} \\ -A_{1,2} & A_{2,2} & -A_{3,2} \\ A_{1,3} & -A_{2,3} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

(attention à l'ordre des indices) où $A_{i,j}$ est le dineur du coefficients $a_{i,j}$ obtenu en considérant la sous-matrice d'ordre 2 de A obtenue en enlevant la ligne et la colonne contenant $a_{i,j}$ puis en calculant le déterminant de cette matrice d'ordre 2. Nous allons donner, comme dans le paragraphe précédent, une interprétation géométrique de ce déterminant.

Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3),\ \overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3),\ \overrightarrow{Z} = (z_1, z_2, z_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. La matrice de ces trois vecteurs est obtenue en mettant en colonne les composantes de ces trois vecteurs :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5. *Le déterminant de la matrice des trois vecteurs* $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\overrightarrow{Z} = (z_1, z_2, z_3)$ *ne dépend pas de la base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *choisie et est égal, en valeur absolue, au volume du parallélépipède supporté par ces trois vecteurs.*

Démonstration. Considérons une deuxième base orthonormée $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base correspond, par définition, à la matrice des trois vecteurs formant cette nouvelle base. Or nous avons vu qu'une telle matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est une matrice orthogonale, c'est-à-dire, si nous notons par P cette matrice, elle vérifie

$$P^{-1} = {}^tP.$$

Exprimons les trois vecteurs donnés $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}\}$ dans la nouvelle base :

$$\begin{cases} \overrightarrow{X} = x_1'\overrightarrow{v_1} + x_2'\overrightarrow{v_2} + x_3'\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{Y} = y_1'\overrightarrow{v_1} + y_2'\overrightarrow{v_2} + y_3'\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{Z} = z_1'\overrightarrow{v_1} + z_2'\overrightarrow{v_2} + z_3'\overrightarrow{v_3} \end{cases}$$

Ainsi la matrice M' de ces trois vecteurs exprimés dans la nouvelle base est

$$M' = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{pmatrix}.$$

Le lien entre les matrices M et M' est donné dans la relation fondamentale, vue en première année mais que nous reprendrons au dernier chapitre :

$$M' = P^{-1}MP.$$

Comme le déterminant d'un produit de deux matrices carrées d'ordre n est le produit des déterminants (ce qui est faux pour la somme), nous en déduisons :

$$\det M' = \det P^{-1} \det M \det P.$$

Or $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$, et ceci implique

$$\det M' = \det M.$$

Notons que pour obtenir cette relation, nous n'avons pas utilisé le fait que la nouvelle base soit orthonormée. L'importance de cette hypothèse va apparaître dans ce qui suit. Le déterminant de M est

$$\det M = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + x_2y_3z_1 - z_2y_2x_3 - z_3y_3x_1 - y_1x_2z_3.$$

Nous pouvons l'écrire comme un produit scalaire :

$$\det M = z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_3).$$

Rappelons que

$$\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3).$$

Alors

$$\det M = (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{Y}) \cdot \overrightarrow{Z}.$$

Notons que pour les mêmes raisons, nous aurons aussi

$$\det M = (\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{X}) \cdot \overrightarrow{Y} = (\overrightarrow{Y} \wedge \overrightarrow{Z}) \cdot \overrightarrow{X}.$$

On prêtera attention à l'ordre d'écriture des vecteurs.

Comparons ce produit scalaire avec l'aire du parallélépipède supporté par les trois vecteurs donnés, que nous supposons indépendants, sinon le parallélépipède serait un peu plat. Rappelons que le volume est égal au produit d'une base par la hauteur issue de cette base. Commençons par calculer l'aire de la base définie par les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$. Ces deux vecteurs déterminent un plan $\mathcal{P}$. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, nous en déduisons que les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{Y} - \frac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X}||^2}\overrightarrow{X}$ forment une base orthogonale de $\mathcal{P}$. Considérons donc la base orthonormée $\left\{\frac{\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{X}||}, \frac{\overrightarrow{Y_1}}{||\overrightarrow{Y_1}||}\right\}$. Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ relatives à cette base sont respectivement $(||\overrightarrow{X}||, 0)$ et $(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y}, ||Y_1||)$. D'après le paragraphe précédent, l'aire du parallélogramme définie par les vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{X}|| & \overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y} \\ 0 & ||\overrightarrow{Y_1}|| \end{pmatrix}$$

et donc égale à $||\overrightarrow{X}||.||\overrightarrow{Y_1}||$ et $||\overrightarrow{Y_1}||^2 = ||\overrightarrow{Y}||^2 - 2\frac{(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2} + \frac{(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2} = ||\overrightarrow{Y}||^2 + \frac{(\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y})^2}{||\overrightarrow{X}||^2}$. Si $\mathcal{A}$ désigne l'aire de ce parallélogramme, alors

$$\mathcal{A}^2 = ||\overrightarrow{X}||^2\ ||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2.$$

La hauteur issue de cette base correspond en valeur absolue au produit scalaire de $\overrightarrow{Z}$ avec le vecteur unitaire orthogonal au plan. Si nous notons par h cette hauteur, nous avons donc

$$h^2 = \left(\frac{\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}||}\cdot\overrightarrow{Z}\right)^2$$

ce qui donne comme volume du parallélépipède :

$$\mathcal{V}^2 = \left(||\overrightarrow{X}||^2\ ||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{Y})^2\right)\left(\frac{\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}}{||\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}||}\cdot\overrightarrow{Z}\right)^2$$

et comme $||\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y}||^2 = ||\overrightarrow{X}||^2||\overrightarrow{Y}||^2 - (\overrightarrow{X}\cdot Y)^2$, nous obtenons

$$\mathcal{V}^2 = ((\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y})\cdot\overrightarrow{Z})^2 = (\det M)^2$$

d'où la proposition.

2.3. **Le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$.**

Définition 2. *On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ et $\overrightarrow{Z}$ de $\mathbb{R}^3$, le nombre*

$$\overrightarrow{X}\cdot(\overrightarrow{Y}\wedge\overrightarrow{Z}).$$

L'expression analytique de ce produit mixte est

$$\overrightarrow{X}\cdot(\overrightarrow{Y}\wedge\overrightarrow{Z}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).$$

On en déduit immédiatement

$$\overrightarrow{X}\cdot(\overrightarrow{Y}\wedge\overrightarrow{Z}) = (\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{Y})\cdot\overrightarrow{Z}.$$

De plus, d'après les résultats du paragraphe précédent, le produit mixte est égal au déterminant de la matrice des trois vecteurs $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$. Il est donc égal en valeur absolue au volume du parallélépipède supporté par les trois vecteurs.

3. Les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Rappelons qu'une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme vérifiant

$$f(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$

pout tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ dans $\mathbb{R}^3$. Un tel endomorphisme est bijectif et sa matrice relative à une base orthonormée est orthogonale, c'est-à-dire vérifie

$$A^{-1} = ^t A.$$

En particulier, le déterminant de A vaut 1 ou -1.

Nous dirons que l'isométrie est *directe* si $\det A = 1$. Sinon nous dirons qu'elle est *indirecte* ($\det A = -1$). . Notons que ces définitions ne dépendent pas de la base orthonormée choisie, car si A' est la matrice de la même isométrie mais relative à une autre base orthonormée, alors

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de changement de bases et donc

$$\det A' = \det P^{-1} \det A \det P = \det A.$$

Le but de ce paragraphe est de déterminer la nature de ces transformations de l'espace. Nous avons vu dans les chapitres précédents, que les symétries par rapport à un plan étaient des isométries. Est-ce que il en existe d'une autre nature ? En dimension 2, nous avons caractérisé toutes les isométries par un calcul algébrique. En dimension 3, nous ne pouvons pas trop compter sur une telle approche. En effet si

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale, la relation ${}^tAA = Id$ est équivalente au système algébrique

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, \end{cases}$$

et nous sommes bien démunis pour résoudre de tels systèmes algébriques. Nous allons donc utiliser une toute autre approche plus liée au calcul matriciel : l'idée est de caractériser une isométrie en déterminant une base orthonormée "adaptée" à cette isométrie dans laquelle la matrice s'exprimera simplement. Nous l'avons vu pour une symétrie par rapport à un hyperplan, en utilisant une base orthonormée qui est obtenue en complétant une base de l'hyperplan, la matrice de l'isométrie n'avait que des éléments (des 1 et des -1) sur sa diagonale. C'est cette approche que nous allons utiliser. Pour commencer, nous allons regarder s'il existe des sous-espaces invariants :

Définition 3. *Un sous-espace vectoriel propre F de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire une droite (dimension 1) ou un plan (dimension 2) est dit invariant par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ si $f(F) \subset F$, autrement dit si*

$$\forall \overrightarrow{X} \in F, \ f(\overrightarrow{X}) \in F.$$

Supposons à présent que f soit une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Soit F un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$. Son orthogonal lui est supplémentaire :

$$F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3.$$

Proposition 6. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Si F est un sous-espace propre invariant par F, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi invariant par f.*

Démonstration. Nous devons montrer que pour tout $\overrightarrow{Y} \in F^{\perp}$, le vecteur $f(\overrightarrow{Y})$ est aussi un vecteur de $F^{\perp}$. Soit donc un vecteur quelconque $\overrightarrow{Z} \in F$ et montrons que $\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = 0$. Comme l'isométrie f est bijective et comme F est invariant par f, la restriction de f à F est un isomorphisme de F. II existe donc un vecteur $\overrightarrow{X} \in F$ tel que $\overrightarrow{Z} = f(\overrightarrow{X})$. Ainsi

$$\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = f(\overrightarrow{X}) \cdot f(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y} = 0$$

car $\overrightarrow{X} \in F$ et $\overrightarrow{Y} \in F^{\perp}$. Ainsi $\overrightarrow{Z} \cdot f(\overrightarrow{Y}) = 0$ pour tout vecteur de F et donc $f(\overrightarrow{Y}) \in F^{\perp}$.

Lemme 2. *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe un sous-espace de dimension* 1 *invariant pour g.*

Démonstration. En fait ce résultat, ici intermédiaire, sera généralisé et commenté dans le chapitre suivant concernant l'étude des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 1 et soit $\overrightarrow{X}$ un vecteur non nul de F. Si F est un sous-espace invariant, comme il est de dimension 1, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\overrightarrow{X}) = \lambda \overrightarrow{X}.$$

Cette équation s'écrit aussi $f(\overrightarrow{X}) - \lambda \overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ ou encore

$$(f - \lambda Id)(\overrightarrow{X}) = 0$$

où Id désigne l'application identique de $\mathbb{R}^3$. Nous en déduisons que $\overrightarrow{X}$ est un vecteur du noyau de l'application linéaire $f - \lambda Id$. Comme $/XX$ est supposé non nul par hypothèse, ce noyau n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. L'application f n'est donc pas injective, elle n'est donc pas bijective. Or nous savons qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel est bijectif si et seulement si le déterminant de n'importe quelle matrice de cet endomorphisme est nul. Ainsi

$$\det(f - \lambda Id) = 0.$$

Calculons ce déterminant. Supposons que la matrice de f dans la base canonique (ou une autre) soit

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M - \lambda Id = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda Id) &= (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda)(c_3 - \lambda) + b_1 c_2 a_3 + a_2 b_3 c_2 \\ &\quad - c_1 a_3 (b_2 - \lambda) - b_1 a_2 (c_3 - \lambda) - c_2 b_3 (a_1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 (a_1 + b_2 + c_3) - \lambda((b_2 c_3 - c_2 b_3) \\ &\quad + (a_1 c_3 - a_3 c_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)) + \det M. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $\det(M-\lambda Id)=0$ est une équation polynomiale de degré 3 et toute équation polynomiale de degré impair a toujours une racine. Ainsi il existe toujours $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'endomorphisme $(f-\lambda Id)$ ait un noyau non nul. D'où le lemme.

Proposition 7. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Il existe une droite vectorielle $\mathcal{D}$ invariante par f et si $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$, alors $\mathcal{P}$ est aussi invariant par f.*

En conséquence, si $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{\overrightarrow{v_1}\}$ soit une base de $\mathcal{D}$ et $\{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ une base de $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$, alors la matrice de f relative à cette base, comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont invariants par f, est de la forme

$$M_1=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & u_1 & u_2\\ 0 & u_3 & u_4\end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant orthogonale, nous en déduisons que $\lambda=\pm 1$ et que la matrice

$$\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_3 & u_4\end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1. *Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\begin{pmatrix}\pm 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

ou de la forme

$$\begin{pmatrix}\pm 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Quelles sont les transformations associées à ces matrices ? Soit $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ la base orthonormée dans laquelle la matrice M de l'isométrie f est l'une des matrices ci-dessus. Notons par $\mathcal{D}$ la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v_1}$ et par $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de base $\{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ qui est l'orthogonal de $\mathcal{D}$: $\mathcal{P}=\mathcal{D}^\perp$.

(1) Considérons le cas où M est la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 1, c'est une isométrie directe et cette isométrie est une rotation. La droite vectorielle $\mathcal{D}$ de base $\overrightarrow{v_1}$ est invariante, de plus la restriction de l'isométrie sur cette droite est l'identité. Le plan $\mathcal{P}$ de base $\{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$ est aussi invariant par l'isométrie f. Sa restriction à $\mathcal{P}$ est, d'après le paragraphe précédent, une rotation d'angle θ. Ainsi, dans ce cas, l'isométrie f est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

Notons que nous pouvons décomposer cette isométrie ainsi :

$$f(\overrightarrow{X})=(\cos\theta)\overrightarrow{X}+(1-\cos\theta)(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{X}.$$

Ceci provient de l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

et de l'interprétation de ces matrices :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \cos\theta\ Id_3 + (1-\cos\theta)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

qui est la matrice de $f = \cos\theta\ Id_3 + (1-\cos\theta)g + \sin\theta h$ dans la base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\}$ où g et h sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $g(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}$ et $h(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v}$.

(2) La matrice M est

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut aussi -1, c'est une isométrie indirecte. La restriction de l'isométrie à la droite vectorielle $\mathcal{D}$ est Id. Le plan $\mathcal{P}$ est invariant par f et sa restriction à $\mathcal{P}$ est une symétrie orthogonale d'axe le vecteur $\overrightarrow{v_4} = \cos\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{v_2} + \sin\dfrac{\theta}{2}\overrightarrow{v_3}$. Ainsi le plan $\mathcal{P}_1$ engendré par les vecteurs indépendants $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_4}$ est invariant par cette isométrie qui en restriction à ce plan est l'identité. Nous en déduisons que f est une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}_1$.

(3) Si la matrice M est

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut -1, l'isométrie f est indirecte. Mais la matrice M peut s'écrire comme le produit

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

La première matrice représente une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$. La deuxième matrice est celle d'une rotation. Ainsi l'isométrie f est ici le composé d'une symétrie orthogonale et d'une rotation.

Notons que nous pouvons décomposer cette isométrie ainsi :

$$f(\overrightarrow{X}) = (\cos\theta)\overrightarrow{X} + (-1-\cos\theta)(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + \sin\theta\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{X}.$$

(4) La matrice M est

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Le déterminant vaut -1 et l'isométrie est indirecte. ici aussi la matrice M s'écrit comme un produit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

et l'isométrie est la composée de deux symétries orthogonales.

Nous en déduisons

Théorème 2. *Soit f une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Alors f est soit une rotation (de centre O), soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, soit une composée de ces deux types d'isométries.*

Par exemple, la symétrie centrale qui s'écrit $f(\overrightarrow{X}) = -\overrightarrow{X}$ a pour matrice $-Id$ dans la base canonique. Cette matrice est le produit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la première matrice du produit représente une symétrie orthogonale par rapport au plan ayant pour base $\{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ et la deuxième matrice une rotation d'axe la droite portée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ et d'angle $\theta = \pi$.

Ainsi dans $\mathbb{R}^3$, il existe une base orthonormée directe $\{v_1, v_2, v_3\}$ telle que la matrice de l'isométrie f dans cette base soit une des matrices suivantes : (matrices de déterminant 1)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Trace = 3$	$f = Id$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Trace = -1$	$s_{\mathcal{D}}$ symetrie orthogonale$/_{\text{droite } \mathcal{D}=Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}}$ $\mathcal{P} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_2, v_3\} = \mathcal{D}^{\perp}$ **Trouver $\mathcal{D}$**
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$Trace = 1 + 2cos\theta,$ $\theta \neq k\pi$	$f = r_{\mathcal{D},\theta}$ rotation d'axe $\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ et d'angle θ **Trouver $\mathcal{D}$ et θ**

Matrices de déterminant -1

4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Trace = -3$	$f = -Id$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Trace = 1$	$s_{\mathcal{P}}$ symetrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\mathcal{P} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$ **Trouver** $\mathcal{P}$
6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$Trace = -1 + 2cos\theta$ $\theta \neq k\pi$	$f = s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\theta}$ avec $\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_2, v_3\}$ **Trouver** $\mathcal{D}$ *et* θ ($\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp}$)

Un des exercices qu'il faut bien maitriser est celui de reconnaître, lorsqu'une isométrie est donnée par sa matrice dans la base canonique (ou une autre), de quel type de transformation il s'agit.

Quand on nous donne la matrice M de f un endomorphisme dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ comment savoir si c'est la matrice d'une isométrie et si c'est le cas comment déterminer dans quel cas nous sommes i.e à laquelle de ces 6 matrices la matrice M est semblable (existe-t-il une base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit une des 6 matrices) ?

(1) On calcule ${}^tMM$: si ${}^tMM \neq 1$, l'endomorphisme f n'est pas une isométrie et on s'arrête là. si ${}^tMM = 1$, l'endomorphisme f est une isométrie et il faut trouver laquelle (bf avec ces éléments caractéristiques).

(2) On calcule $\det M$ et $TraceM$: en effet ces deux nombre ne dépendent pas de la base choisie pour écrire la matrice de f. Cela suffit à savoir ce qu'est f.

(3) On détermine les éléments caractéristiques de f :
   (a) pour les cas 1 ($f = Id$) et 4 ($f = -Id$) il n'y a rien à faire.
   (b) pour le cas 2. On cherche les vecteurs v tq $f(v) = v$. On a $\mathcal{D} = \{f(v) = v;\ v \in \mathbb{R}^3\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ (avec un vecteur v_1 unitaire) et on prend v_2 unitaire tq $v_2 \cdot v_1 = 0$ puis $v_3 = v_1 \wedge v_2$ (il sera alors unitaire et $\{v_1, v_2, v_3\}$ sera une base orthonormée).
   (c) pour le cas 3. On cherche les vecteurs v tq $f(v) = v$. On a $\mathcal{D} = \{f(v) = v;\ v \in \mathbb{R}^3\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ (avec un vecteur v_1 unitaire). $\mathcal{D}$ est l'axe de la rotation. Pour l'angle θ, on sait que $Trace(M) = 1 + 2cos\,\theta$ donc on trouve θ. Il suffit alors de trouver le sinus de θ pour pouvoir déterminer θ $det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, f(v_2)) = det_{\mathcal{B}'}(v_1, v_2, f(v_2)) = sin\theta$.
   (d) pour le cas 5. On cherche les vecteurs v tq $f(v) = v$. On a $\mathcal{P} = \{f(v) = v;\ v \in \mathbb{R}^3\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2\}$ (avec des vecteurs v_1 et v_2 unitaires orthogonaux) et on prend $v_3 = v_1 \wedge v_2$.

(e) pour le cas 6. On cherche les vecteurs v tq $f(v) = -v$. On a $\mathcal{D} = \{f(v) = v;\ v \in \mathbb{R}^3\} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ (avec un vecteur v_1 unitaire). $\mathcal{D}$ est l'axe de la rotation. Pour l'angle θ, on sait que $Trace(M) = -1 + 2cos\ \theta$ donc on trouve θ. Il suffit alors de trouver le sinus de θ pour pouvoir déterminer θ. $det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, f(v_2)) = det_{\mathcal{B}'}(v_1, v_2, f(v_2)) = sin\theta$ c'est-à-dire

$$det \begin{array}{cc} v_1\ v_2\ f(v_2) & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array} = det \begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & v_2 & f(v_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & 0 & sin\theta \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array} = sin\theta$$

Autre possibilité on utilise

$$f(\overrightarrow{X}) = (\cos\theta)\overrightarrow{X} + (-1 - \cos\theta)(\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + \sin\theta\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{X}.$$

en prenant un $\overrightarrow{X}$ bien choisi (par exemple un des $\overrightarrow{e_i}$).

Premier exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$.

On vérifie que

$${}^tMM = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = Id_3$$

donc f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$. De plus

$$detM = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(-2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\right) = \left(\frac{1}{27}\right)(-12 - 3 - 12) = -1$$

donc M est semblable à

$$\underset{Trace = -3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \text{ou} \quad \underset{Trace = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \text{ou} \quad \underset{Trace = -1 + 2cos\theta, \theta \neq k\pi}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}.$$

Or

$$TraceM = \left(\frac{-2}{3} + \frac{-2}{3} + \frac{-2}{3}\right) = -2$$

donc

$$TraceM = -2 = -1 + 2cos\theta$$

et M semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. C'est donc une symétrie-rotation, c'est-à- dire la composée d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp}$ et il faut donc déterminer $\mathcal{D}$ et θ. Pour trouver $\mathcal{D}$ on cherche les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = -(x, y, z)$. On a

$$f(x,y,z) = -(x,y,z) \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (M + Id_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = y \end{array} \right. .$$

Donc $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = -(x, y, z)\} = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\} = Vect_R\{(1, 1, 1)\}$ ou bien encore

$$\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$$

(pour que $||v_1|| = 1$). Il faut maintenant déterminer θ : on sait déjà que $-2 = -1 + 2cos\theta$ d'où $cos\theta = -\frac{1}{2}$. De plus prenons un v_2 orthogonal à v_1 et $||v_2|| = 1$, par exemple

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$$

(le vecteur $(1, 0, -1)$ est bien orthogonal à v_1 puisque $v_1 \cdot (1, 0, -1) = 0$ et $||(1, 0, -1)|| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, donc $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ est bien unitaire et orthogonal à v_1).
On a alors

$$Mv_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & f(v_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} = det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & f(v_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & cos\theta \\ 0 & 0 & sin\theta \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 = v_1 \wedge v_2 \end{array} = sin\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(0 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme $cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, l'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
Finalement f est une symétrie-rotation d'axe $\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1\}$ et d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Remarque.

(1) On a

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_2, v_3 = v_1 \wedge v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})\}$$

(on peut constater que l'on a bien $v_3 \cdot v_1 = 0 = v_3 \cdot v_2$ et $||v_3|| = 1$). De plus la matrice de f dans la base (orthonormée directe) $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3 = v_1 \wedge v_3\}$ est la matrice

$$M' = P^{-1}MP$$

avec $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$. Comme la matrice de changement de base d'une base orthogonale à une base orthogonale est une matrice orthogonale, c'est à dire que ${}^tPP = Id_3$ on a $P^{-1} = {}^tP$. Donc $P^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$. On a alors

$$M' = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

(2) En utilisant

$$f(\overrightarrow{X}) = (\cos\theta)\overrightarrow{X} + (-1-\cos\theta)(\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1} + \sin\theta\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{X}.$$

en prenant un $\overrightarrow{X} = e_1$ on a $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où

$f(e_1) = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3$ d'une part et
$f(e_1) = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}\left((1,0,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\right)(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) + sin\theta(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\wedge(1,0,0)$
$= -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) + sin\theta(0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{2}e_1 - (\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + sin\theta(0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$
$= (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}+\frac{sin\theta}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{6}-\frac{sin\theta}{\sqrt{3}})$
d'oú (sur e_1) $frac12 + \frac{sin\theta}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(si on avait pris $\overrightarrow{X} = e_2, f(e_2) = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$ et
$f(e_2) = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}\left((0,1,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\right)(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) + sin\theta(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\wedge(0,1,0)$
$= -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) + sin\theta(-\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{\sqrt{3}})$
d'où $-\frac{1}{6} = \frac{sin\theta}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{sin\theta}{\sqrt{3}} = \frac{1+2}{6} \Leftrightarrow sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) Si on prend comme vecteur directeur de l'axe $\mathcal{D}$ le vecteur $(1,1,1)$ et $(1,0,-1)$ un vecteur orthogonal, la famille de vecteurs $\{(1,1,1),(1,0,-1),(1,1,1)\wedge(1,0,-1) = (-1,2,-1)\}$ est une base orthogonale mais pas orthonormée.

$$det((1,1,1),(1,0,-1),f(1,0,-1)) = det((1,1,1),(1,0,-1),(-1,1,0) = 3.$$

Ce n'est pas égal à $sin\theta$ mais seulement du **même signe de** $sin\theta$.

Exemple. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$.

On vérifie que ${}^tMM = Id_3$. L'endomorphisme f est donc une isométrie de $\mathbb{R}^3$. On a $detM = \left(\frac{1}{3}\right)^3 (3+12+12) = 1$ donc M est semblable à

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{ou} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{ou} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \\ Trace = 3 & & Trace = -1 & & Trace = 1 + 2cos\theta, \theta \neq k\pi \end{array}$$

Or $TraceM = \left(\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3} + \frac{-1}{3}\right) = -1$ donc f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et M semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons D : on cherche les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (x, y, z)$. On a

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (M - Id_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - 4z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2x + y - z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y = -z \\ x = y \end{array} \right. .$$

Donc $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \{(x, x, -x); x \in \mathbb{R}\} = Vect_R\{(1, 1, -1)\}$ ou bien encore

$$\mathcal{D} = Vect_{\mathbb{R}}\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)\}$$

(pour que $||v_1|| = 1$). De plus si on prend un v_2 orthogonal à v_1 et $||v_2|| = 1$, par exemple

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$

(le vecteur $(1, -1, 0)$ est bien orthogonal à v_1 puisque $v_1 \cdot (1, -1, 0) = 0$ et $||(1, -1, -0)|| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ est bien unitaire et orthogonal à v_1). Prenons $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$.

On a alors $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp = Vect_{\mathbb{R}}\{v_2, v_3 = v_1 \wedge v_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$. (on peut constater que l'on a bien $v_3 \cdot v_1 = 0 = v_3 \cdot v_2$ et $||v_3|| = 1$). De plus la matrice de f dans la base (orthonormée directe) $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3 = v_1 \wedge v_3\}$ est la matrice

$$M' = P^{-1}MP = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

avec $P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$.

On peut vérifier que $M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(v_2) = -v_2$ et $M \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ donc $f(v_3) = -v_3$ donc retrouver la matrice M' sans faire le produit matriciel.