Faculté des Sciences et Techniques. UHA MULHOUSE

L2 Physique-Chimie

Mathématiques: SERIES ET INTEGRALES

Cours Elisabeth REMM

Chapitre 4

Séries de Fourier

Dans le chapitre précédent nous avons vu un exemple particulier de séries de fonctions: les séries entières

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Quand le rayon de convergence d'une série entière était non nul, la somme de cette série entière était une fonction indéfiniment dérivable. On avait aussi regardé à quelles conditions une fonction indéfiniment dérivable était développable en série entière c'est à dire limite d'une suite de fonctions $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. On a aussi vu que le candidat naturel pour son développement en série entière avait pour coefficients $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$. Dans ce chapitre, nous allons voir un autre exemple particulier de séries de fonctions: les séries de Fourier. Nous allons voir quelles sont les propriétés de la somme d'une série de Fourier, et à quelles conditions une fonction périodique peut s'écrire comme somme d'une série de Fourier. La suite $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sera une suite de polynômes trigonométriques et l'étude de ces derniers donnera la forme de la série de Fourier.

1. Fonctions 2π-périodiques et polynômes trigonométriques

1.1. Fonctions 2π-périodiques.

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Elle est 2π-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.*

Exemples

1. Soit $f(x) = 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction 2π-périodique puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = 4 = f(x)$. Plus généralement $f(x) = c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique.
2. Les fonctions $\sin(x)$, $\cos(x)$, ou plus généralement $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions 2π-périodiques.

Proposition 1. *L'ensemble des fonctions 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

En effet la somme de deux fonctions 2π-périodique est une fonction 2π-périodique et en mutlipliant une fonction 2π-périodique par un scalaire on a encore une fonction 2π-périodique.

1.2. **Polynômes trigonométriques.**

Définition 2. *Un polynôme trigonométrique est une fonction du type*

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Il est clair qu'un polynôme trigonométrique est une fonction 2π-périodique.

Proposition 1. *Soit $f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(nx)$ un polynôme trigonométrique alors*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \cos(nx) dx, \quad 0 \leq n \leq N,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \sin(nx) dx, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Démonstration. Elle repose sur les calculs suivants. Supposons que $n \neq m$. Alors

$$\begin{cases} \cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right), \\ \cos(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}\left(\sin((n+m)x) - \sin((n-m)x)\right), \end{cases}$$

et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)dx),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)x)dx),$$

Mais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)dx = 0$$

dès que $p \neq 0$. Ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0$$

dès que $n \neq m$. Supposons $n = m$ Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} dx) = \pi$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(nx)dx = \frac{1}{2}(\int_{-\pi}^{\pi} \sin((2n)x)dx = 0.$$

On en déduit, pour n tel que $1 \leq n \leq N$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2}\cos(nx) + \sum_{m=1}^{N} a_m \cos(mx)\cos(nx) + \sum_{m=1}^{N} b_m \sin(mx)\cos(nx))dx$$

et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2(nx)dx = a_n\pi.$$

D'où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_N(x)\cos(nx)dx.$$

Le calcul est le même pour les coefficients b_n.

2. Série de Fourier associée à une fonction 2π-périodique f réelle

2.1. **Coefficients de Fourier.**

Définition 3. *Soit f une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.*

(1) *On appelle coefficients réels de Fourier de f les coefficients*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1.$$

(2) *On appelle série de Fourier (réelle) de f la série trigonométrique*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

Définition 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.*

(1) *On appelle coefficients (complexes) de Fourier de f les coefficients*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \geq 0,$$

(2) *On appelle série de Fourier (exponentielle) de f la série*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$$

Montrons que ces deux définitions sont équivalentes. Par définition, l'exponentielle complexe est

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

On a alors

$$\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2} \\ c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)), \quad n \geq 1 \\ (c_{-n}(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)), \quad n \geq 1) \end{cases}$$

2.2. **Propriétés des coefficients de Fourier.**

Proposition 2. *Soit f une fonction 2π-périodique. On a alors:*

(1) $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1,$

(2) *Si f est paire, c'est à dire si $f(x) = f(-x)$ pour tout x, alors*

$$\begin{cases} a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0, \\ b_n(f) = 0 \end{cases}$$

(3) *Si f est impaire, c'est à dire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x, alors*

$$\begin{cases} a_n(f) = 0 \\ b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1, \end{cases}$$

Remarque. On peut en fait calculer les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en intérgrant, non seulement sur $[-\pi, \pi]$, mais aussi sur n'importe quel intervalle de longueur la période 2π. Ainsi on aura:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1,$$

pour tout α réel.

Démonstration.

(1) Rappelons que toute fonction se décompose de manière unique comme une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Le résultat se déduit donc directement des résultats (2) et (3).

(2) Si f est paire, on a $f(-x) = f(x)$ pour tout x. Alors

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Faisons le changement de variable $t = -x$. On obtient alors

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx = \int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-nt)dt = \int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Ainsi

$$b_n(f) = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

De même

$$\begin{array}{ll} a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx & = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ & = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(-nt)d(-t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ & = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cos(nt)d(t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ & = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \end{array}$$

(3) On obtient les résultats énoncés de la même façon.

2.3. **Exemple de calcul de série de Fourier.** Soit f la fonction 2π-périodique, paire définie par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ pour } \ x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Comme f est une fonction paire, son graphe présente une symétrie par rapport à Oy. Ainsi le graphe sur une période $[-\pi, \pi]$ s'obtient en dessinant le graphe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donné dans l'énoncé, puis on fait une symétrie par rapport à Oy. On utilise ensuite la 2π-périodicité pour compléter sur plusieurs périodes. le graphe.

Calculons de la série de Fourier de f: On a, puisque f est paire, $b_n(f) = 0$ et

$$\begin{array}{ll} a_n(f) & = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \dfrac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cos(nx)dx] \\ & = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos(nx)dx. \end{array}$$

Or $\cos x\cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\cos(x+nx) + \cos(x-nx)] = \dfrac{1}{2}[\cos((1+n)x) + \cos(n-1)x)]$. D'où, si $n \neq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n,+1)x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n-1)x)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+1)\frac{\pi}{2})}{n+1} + \frac{\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\right].$$

Or

$$\sin(p\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^q \text{ si } \ p = 2q+1, \\ 0 \text{ si } \ p = 2q. \end{cases}$$

Ainsi

$$a_{2p+1}(f) = 0, \quad p \geq 1$$

et

$$a_{2p}(f) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^p}{2p+1} + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right] = \frac{(-1)^p}{\pi}\frac{-2}{4p^2-1} \quad p \geq 1.$$

Calculons $a_1(f)$:

$$a_1(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)+1}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Il reste à calculer $a_0(f)$.

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

La série de Fourier de f est donc

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{F}}(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{\pi}\frac{-2}{4p^2-1}\cos(2px) \end{aligned}$$

3. Convergence de la série de Fourier. Théorème de Dirichlet

Etant donnée une fonction périodique intégrable (par exemple continue ou continue par morceaux avec des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire que le saut de discontinuité est fini), on peut écrire sa série de Fourier. Le problème qui se pose alors est de trouver pour quelles valeurs de x cette série est convergente, et dans le domaine de convergence, quel est le lien entre la fonction donnée et la somme de sa série de Fourier.

3.1. **Le théorème de Dirichlet.** Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que la fonction f vérifie les conditions de Dirichlet en x_0 si

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = f(x_0^-) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = f(x_0^+) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0} \text{ existe} \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0} \text{ existe} \end{cases}$$

En particulier, si f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$ et la fonction vérifie les conditions de Dirichlet en x_0. Si f n'est pas continue mais présente en x_0 un saut de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire fini), alors la fonction vérifie aussi les conditions de Dirichlet en ce point.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur tout segment et 2π-périodique. Si f vérifie les conditions de Dirichlet en x_0 alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$, i.e.*

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}.$$

Si de plus f est continue en x_0 alors

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x_0) = f(x_0).$$

Ainsi en les points qui vérifient les conditions de Dirichlet la série de Fourier de f converge, vers $\dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$. La série de Fourier en x_0 ne converge donc vers $f(x_0)$ que si $f(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ en particulier si f est continue en x_0.

3.2. **Exemple.** Soit la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

Cette fonction n'est ni paire, ni impaire. Calculons sa série de Fourier. On a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = 0$$

car on a deux aires géom´etrique de signes opposés. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi - x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[(-\pi - x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(nx)}{n}dx + \left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{n^2} + \frac{\cos(-n\pi)}{n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \ n \text{ est pair} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \text{ si } \ n \text{ est impair} \end{cases}$$

Calculons, pour tout $n \geq 1$, les coefficients $b_n(f)$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

On trouve, par un calcul analogue au précédent:

$$b_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } & n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{n} \text{ si } & n \text{ est impair} \end{cases}$$

La série de Fourier de f est alors

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)x) + \frac{2}{2p+1}\sin((p+1)x)$$

Etudions à présent les problèmes de convergence. La fonction f vérifie les conditions de Dirichlet en tout point $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$ car la fonction f est alors continue et dérivable en ces points. Pour les points $x_0 = k\pi$ la fonction est discontinue. Montrons qu'elle vérifie bien les conditions de Dirichlet. Il suffit de le vérifier en $-\pi, 0$ (pour les autres points on aura le résultat car la fonction est 2π-périodique).

Pour $x_0 = 0$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = f(x_0^+), \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\pi - x = -\pi = f(x_0^-), \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} =, \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\pi - x - (-\pi)}{x} = -1. \end{cases}$$

et f vérifie les conditions de Dirichlet en 0.

Pour $x_0 = -\pi$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^+} -\pi - x = 0 = f(-\pi_0^+), \\ \lim\limits_{x\to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^-} x + 2\pi = \pi = f(-\pi^-), \\ \lim\limits_{x\to -\pi^+} \dfrac{-\pi - x - (0)}{x-\pi} = -1, \\ \lim\limits_{x\to -\pi^-} \dfrac{x + 2\pi - \pi}{x+\pi} = 1 \end{cases}$$

et f vérifie les conditions de Dirichlet en $x_0 = -\pi$.

D'après le théorème de Dirichlet pour $x = 0$ qui est un point de discontinuité de f on a

$$S_{\mathcal{F}}(f)(0) = \frac{0 + (-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Une application intéressante est celle-ci permettant un calcul théorique de π et surtout des valeurs approchées. On a

$$S_{\mathcal{F}}(f)(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos(0) + \frac{2}{2p+1}\sin(0)2 = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}.$$

On en déduit

$$\pi^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{(2p+1)^2}.$$

Remarque. Les rśeultats du chapitre précdent permettent de voir la convergence de la série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{(2p+1)^2}$. En effet on a $\frac{1}{(2p+1)^2} \geq 0$ et

$$\frac{1}{(2p+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2}.$$

Les séries entièrres $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4p^2}$ sont donc de même nature d'après le critère de comparaison. Or $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$ est une série de Riemann convergente. Ainsi la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ est convergente. Mais cela ne permettait pas de trouver sa somme. Ici on a réussi à la déterminer.

Prenons maintenant $x_0 = \frac{\pi}{2}$. C'est un point où f est continue donc

$$S_{\mathcal{F}}(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Mais

$$S_{\mathcal{F}}(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\cos((2p+1)\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{2p+1}\sin((p+1)\frac{\pi}{2}).$$

Ainsi

$$S_{\mathcal{F}}(f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{2p+1}$$

et on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Cette formule permet, en choisissant des valeurs de plus en plus grandes de n d'avoir une approximation de la valeur de π en approximant π par

$$\sum_{p=0}^{+\mathtt{n}} \frac{(-4)^p}{2p+1}.$$

3.3. **Formule de Parseval.** Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant les hypothèsse de Dirichlet. Si

$$S_{\mathcal{F}}(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$$

est sa série de Fourier, alors la série numérique

$$\sum (a_n^2 + b_n^2)$$

converge.

On en déduit la formule de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2 + \cdots$$

Si on considère la série de Fourier exponentielle

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

alors la formule de Parseval s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mid c_n \mid^2 .$$

En reprenant l'exemple précédent et en lui appliquant la formule de Parseval on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 dx &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x^2 dx + \int_{-\pi}^{0}(\pi^2 + 2\pi x + x^2)dx\right) \\ &= \frac{2\pi^2}{3}\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

soit

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} + \sum \frac{4}{(2p+1)^2}$$

Nous avons vu que $\sum \frac{8}{(2p+1)^2} = \pi^2$. Ainsi

$$\sum \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3} - \sum \frac{4}{(2p+1)^2} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$