CNAM MULHOUSE . Ramm Algebra Center

Formation Ingénieur Informatique

Mathématiques : PROBABILITES

Cours Michel GOZE

Chapitre 7

Fonctions de deux variables aléatoires

1. Généralitées

Etant donnée une fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

de deux variables réelles, et deux variables aléatoires X, Y sur un même espace probabilisé (Ω, Σ, P), on se propose d'étudier la nouvelle variable aléatoire définie par la relation

$$Z = g(X, Y).$$

Sooit $z \in \mathbb{R}$. On désigne par D_z la région du plan Oxy définie par

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) \leq z\}.$$

Cette région peut être relativement compliquée. par exemple, elle n'est pas en général connexe, c'est-à-dire est la réunion d'un nombre fini ou pas de domaines disjoints. Un problème mathématique important, que l'on rencontre en ingéniérie mathématique, est de déterminer ce nombre de composantes (on peut imaginer que x et y sont des paramètres de réglages d'un moteur, la fonction g concene le but recherché, il est impératif de connaître l'ensemble des valeurs des paramètres qui correspondent aux données de g. Pour un tel problème, des méthodes basées sur des probabilités sont en train d'être développée, l'intérêt étant de pouvoir donner les réponses en temps réels.

Ceci étant, pour définir la loi de probabilité de la variable $Z = g(X, Y)$, il est nécessaire de calculer

$$\{Z \leq z\} = \{g(X, Y) \leq z\}.$$

Autrement dit, on doit chercher les couples (x, y) tels que

$$\{(X, Y) \in D_z\}.$$

Definition 1. *La loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ est donnée par*

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int\int_{D_z} f(x, y) dxdy.$$

On remarquera que la fonction $f(x, y)$ n'est pas la densité de Z, Nous allons calculer cette fonction pour des données de g classiques, correspondant aux opérations élémentaires.

2. Somme de deux variables aléatoires $Z = g(X, Y) = X + Y$

Si $Z = X + Y$, le domaine $D_z = \{(x, y), x + y \leq z\}$ est le demi-plan inférieur du plan Oxy limité par la droite d'équation $z = x + y$. On aura donc :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx dy.$$

La densité de Z est alors donnée par

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy.$$

Il nous reste donc à déterminer cette fonction f. En général, sans aucune autre hypothèse sur X et Y, cela est compliqué. Nous allons donc nous ramener au cas le plus intéressant, celui où les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Rappelons que X et Y sont indépendantes si la fonction de répartition du couple (X, Y) est donnée par $F_{(X,Y)} = F_X(x)F_Y(y)$. Dans ce cas la densité du couple (X, Y) est $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Theorem 2. *Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors la densité de la variable $Z = X + Y$ est donnée par*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - x) f_Y(y) dy$$

où f_X et f_Y sont les densités respectives de X et Y.

Le produit défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-x)f_Y(y)dy$ est appelé le produit de convolution des fonctions $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ et est noté

$$f_X \star f_Y.$$

Bien entendu, on passe sur tous les problèmes concernant l'existenxe de cette intégrale. Pour bien comprendre ce théorème et le produit de convolution, voici un exemple de somme de probabilités finies tiré de l'ouvrage de Walter Appel.

Exemple. On mange, pendant deux jours un morceau de chocolat pesant entre 1 et 100 grammes. On note par X la quantité de chocolat mangée le premier jour et par Y celle du deuxième jour. On suppose que la quantité k de chocolat mangée ne prend que des valeurs entières avec une probabilité $P(k) = 1/k.$. La probabilité pour que la quantité k mangée en deux jours soit minimum soit 2 grammes (on mange tous les jours du chocolat) est donc

$$P(2) = \frac{1}{100}\frac{1}{100} = \frac{1}{10000}.$$

La probabilité pour manger 5 grammes en deux jours correspond aux couples $(X, Y) = (1, 4)$ ou $(2, 3)$ ou $(3, 2)$ ou $(4, 1)$. On a donc

$$P(5) = \frac{1}{100}\frac{4}{100} + \frac{2}{100}\frac{3}{100} + \frac{3}{100}\frac{2}{100} + \frac{4}{100}\frac{1}{100} = \frac{20}{10000}.$$

Plus généralement, la probabilité de manger n grammes en deux jours sera

$$P(n) = P(1)P(n-1) + P(2)P(n-2) + \cdots + P(k)P(n-k) + \cdots + P(n)P(1).$$

Cette formule est la version finie du produit de convolution.

Theorem 3. *Soient $Z = X + Y$ la somme de variables aléatoires sur l'espace (Ω, Σ, P). Soit $f_(X, Y)$ la densité de probabilité du couple (X, Y). Alors la densité de probabilité de la somme f_Z est donnée par*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, z - t)dt.$$

Si les variables sont indépendantes, alors

$$f_Z = f_x \star f_Y.$$

Le théorème suivant donne la variance de la somme de deux variables indépendantes.

Theorem 4. *Soit X et Y deux variables indépendantes. On suppose que les variances $Var(X)$ et $Var(Y)$ sont finies (ce qui est le cas si X et Y sont finies). Alors*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

3. Produit de deux variables aléatoires $Z = g(X, Y) = XY$

Si $Z = XY$, le domaine $D_z = \{(x, y), xy \leq z\}$ est la partie du plan Oxy limité par la courbe d'équation $z = xy$. Cette courbe est une hyperbole équilatère constituée de deux branches. Le domaine D_z en est la partie du plan située entre les deux branches. Comme pour la somme, nous allons avoir le résultat suivant donnat la densité du produit.

Theorem 5. *Soient $Z = XY$ le produit de variables aléatoires sur l'espace (Ω, Σ, P). Soit $f_(X, Y)$ la densité de probabilité du couple (X, Y). Alors la densité de probabilité du produit f_Z est donnée par :*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, \frac{z}{t})\frac{1}{t}dt.$$

Si les variables sont indépendantes, alors

$$f_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(\frac{z}{t})\frac{1}{t}dt.$$

Rappelons que l'espérance de la variable X est donnée par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt.$$

Soit $Z = XY$ et notons $f_{X,Y}(x, y)$ la densité du couple (X, Y). Alors

$$E(Z = XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{X,Y}(x, y)dxdy.$$

Theorem 6. *Soient $Z = XY$ le produit de variables aléatoires sur l'espace (Ω, Σ, P). Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Cas particulier. Si $X = Y$, dans ce cas X et Y ne sont pas indépendantes, on peut s'intéresser à la variable X^2 et plus généralement à X^k. Il est clair que $f_{X,Y} = f_{X,x} = f_X$. on en déduit

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt.$$

On récupère ainsi le moment d'ordre 2 de la variable X.

4. Quotient de deux variables aléatoires $Z = g(X,Y) = X/Y$

La région D_z est délimitée par la droite d'équation $x = yz$. Supposons par exemple $z > 0$. Alors la région donnée par exemple par $x/y \leq z$ est délimité par l'intersection du demi-plan $x \leq yz$ avec le demi-plan $y > 0$ et par l'intersection du demi-plan $x \geq yz$ avec le demi-plan $y < 0$.

On admettra que

$$F_Z(z) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yz} f_{X,Y}(x,y)dxdy + \int^0 - -\infty \int_{yz}^{-\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

et

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(zy,y)dy.$$

On peut montrer, par exemple, que si X et Y sont des variables suivant la loi normale, alors $Z = X/Y$ a une densité de Cauchy.

EXERCICES

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $\mathbb{R}$ suivant la loi de probabilité uniforme sur les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ respectivement. Déterminer la densité de $X + Y$.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} U(x), \quad f_Y(y) = \beta e^{-\beta y} U(y)$$

où $U(x)$ est la fonction réelle définie par $U(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $U(x) = 0$ si $x < 0$. Déterminer la densité de $Z = X + Y$.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes de moyenne respective m_X et m_Y et d'écart-type σ_X et σ_Y. Montrer que $Z = X + Y$ est encore une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m_Z = m_X + m_Y$ et de variance $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé suivant la loi uniforme sur $[1, n]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé suivant la loi binomiale de paramètres respectifs (m, p) et (n, p). . Déterminer la loi de $X + Y$.