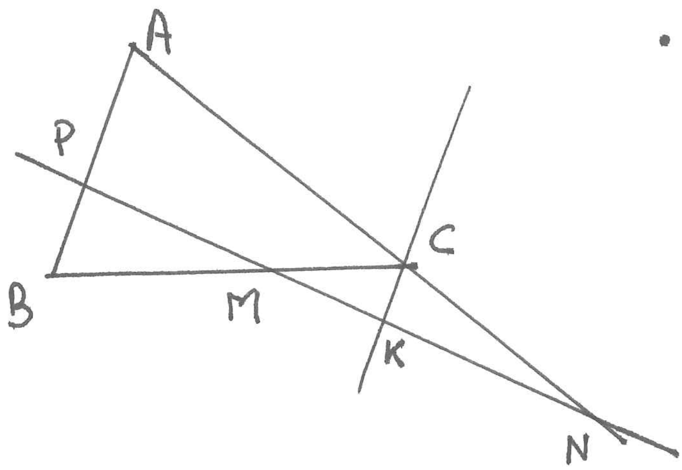
L3 Géométrie

TD 1 Géométrie du triangle

Exercice 1

1. Théorème de Ménélaüs



- Supposons P, M et N alignés. Traçons la parallèle à AB passant par C. Elle coupe PMN en K.

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle APN, on obtient :

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AP}}$$

De même dans les triangles MBP et MCK on a

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CK}}$$

D'où $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CK}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$

Réciproquement, supposons que P, M, N vérifient

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

Si les droites (PN) et (BC) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès appliqué à ABC, on aurait

$\cancel{\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \neq \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}}$ $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Or $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ ce qui implique

$\overline{MB} = \overline{MC}$ soit $B = C$ ce qui est impossible.

Soit M' le point d'intersection de (NP) avec (BC).

D'après la première partie, on aurait

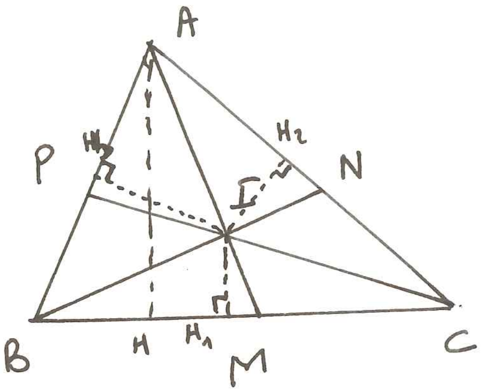
$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$$

Comme $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, on déduit

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}$$

D'où $M = M'$ et P, M et N sont alignés

2. Théorème de Céva



Supposons (AM), (BN) et (CP) concourantes en I (et I intérieur au triangle). On trace les trois perpendiculaires issues de I aux côtés de ABC. On a donc

aire $IBM = \frac{1}{2}\, \overline{IH_1} \cdot \overline{BM}$, aire $IMC = \frac{1}{2} \overline{IH_1} (-\overline{CM})$ Donc

$\frac{\text{aire } IBM}{\text{aire } ICM} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$. De même $\frac{\text{aire } ICN}{\text{aire } INA} = -\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}$, $\frac{\text{aire } API}{\text{aire } PIB} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$

Considérons le triangle ABM et AMC. On a

aire $ABM = \frac{1}{2}\, \overline{BM} \cdot$ hauteur $\overline{AH}$, aire $AMC = \frac{1}{2} \overline{MC} \cdot \overline{AH}$. D'où

$$\frac{\text{aire } ABM}{\text{aire } AMC} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \frac{\text{aire } IBM}{\text{aire } ICM} = \frac{\text{aire } ABM - \text{aire } IBM}{\text{aire } MAC - \text{aire } ICM} = \frac{\text{aire } ABI}{\text{aire } ACI}$$

De même

$$-\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{\text{aire } ICN}{\text{aire } INA} = \frac{\text{aire } BNC}{\text{aire } BNA} = \frac{\text{aire } BIC}{\text{aire } BIA}$$

$$-\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\text{aire } API}{\text{aire } PIB} = \frac{\text{aire } CPA}{\text{aire } BCP} = \frac{\text{aire } ICA}{\text{aire } BIC}$$

D'où $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\text{aire } IBA}{\text{aire } ICA} \cdot \frac{\text{aire } IBC}{\text{aire } IBA} \cdot \frac{\text{aire } ICA}{\text{aire } IBC} = -1$

Réciproquement. Les droites BN et CP se coupent en un point I. Traçons la droite AI. Elle coupe (BC) en M'.

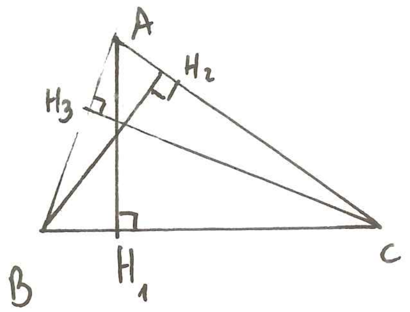
D'après la première partie

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

Comme $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$, on déduit $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}$ d'où $M = M'$

et AM passe par I

3° Considérons les trois hauteurs de ABC



Les triangles rectangles BH_2A et CH_3A sont semblables donc

$$\frac{\overline{BH_2}}{\overline{CH_3}} = \frac{\overline{H_2A}}{\overline{H_3A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$$

De même BH_3C et BH_1A sont ~~pro~~ semblable

$$\frac{\overline{BH_3}}{\overline{BH_1}} = \frac{\overline{H_3C}}{\overline{H_1A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$$

Enfin CH_2B et CH_1A sont semblables d'où

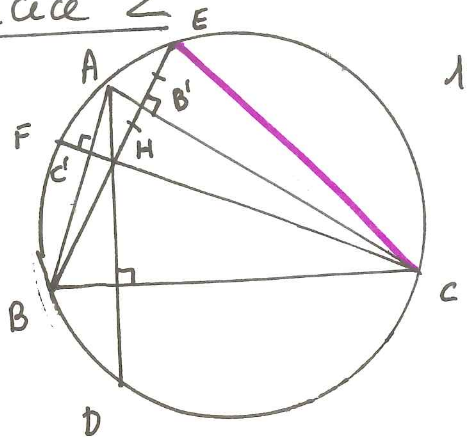
$$\frac{\overline{CH_2}}{\overline{CH_1}} = \frac{\overline{H_2B}}{\overline{H_1A}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

D'où $\frac{\overline{H_1B}}{\overline{H_1C}} \cdot \frac{\overline{H_2C}}{\overline{H_2A}} \cdot \frac{\overline{H_3A}}{\overline{H_3B}} = \cancel{\frac{AB}{AC}} \cdot \frac{\overline{H_1B}}{\overline{H_3B}} \cdot \frac{\overline{H_2C}}{\overline{H_1C}} \cdot \frac{\overline{H_3A}}{\overline{H_2A}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = -1$

Ainsi d'après le théorème de Céva, les trois hauteurs sont concourantes.

L3 Géométrie . TD 1   p 4

Exercice 2



1°) Soit E le symétrique de l'orthocentre H par rapport à AC. Montrons que E est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Comme l'angle BAC intercepte l'arc BD, il suffit de montrer que $\widehat{BEC} = \widehat{BAC}$

Soit C' le pied de la hauteur CH. Le triangle ACC' est rectangle en C' donc

$$\widehat{CAC'} = \frac{\pi}{2} + \widehat{C'CA}$$

Comme la base du triangle HCE est coupée en deux parties égales par la hauteur, ce triangle est isocèle. En particulier la hauteur est aussi bissectrice et

$$\widehat{HCA} = \widehat{ACE} = \frac{1}{2}\widehat{C'CE}$$

Donc $\widehat{C'CA} = \frac{1}{2}\widehat{C'CE}$ et $\widehat{CAC'} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{C'CE}$

~~Dans le triangle rectangle CB'E (où B' est le pied de AH)~~

Dans le triangle isocèle HCE on a aussi

$$\widehat{HCE} + 2\widehat{CEH} = \pi$$

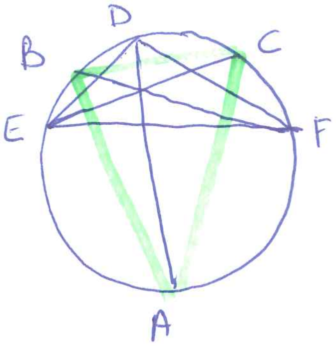
soit $\widehat{CEH} = \widehat{CEB} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{HCE}$. On en déduit

$$\widehat{CAC'} = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{C'CE} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{HCE} = \widehat{CEB}$$

D'où $\widehat{CAB} = \widehat{CEB}$ et E est sur le cercle passant par A, B, C. (les quatre points ABCE sont cocycliques). Il en est de même pour les points D et F

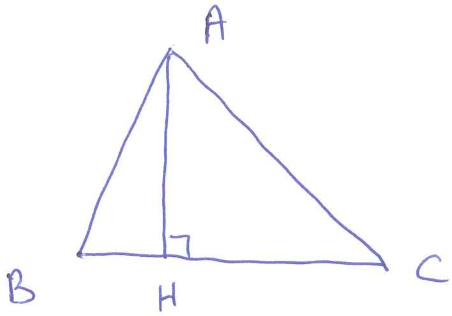
2°) Les points A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle. Les angles qui interceptent le même arc sont égaux. Donc $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$, $\widehat{FDA} = \widehat{FCA}$. Mais $\widehat{FCA} = \widehat{ACE}$, donc $\widehat{FDA} = \widehat{ADE}$ et AD est la bissectrice de l'angle du triangle FDE. De même pour les autres hauteurs.

On considère le cercle circonscrit au triangle DEF



On trace les bissectrices de chacun des angles. Elles coupent le cercle en A, B, C. Le triangle ABC est le triangle demandé.

Exercice 3



1°) Dans le triangle ACH rectangle, on a

$$AH^2 = b^2 - CH^2$$

or $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2\,CB.CH$ soit $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.CH$

et $CH = \dfrac{b^2+a^2-c^2}{2a}$

On en déduit

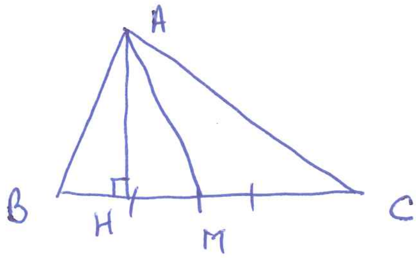
$$AH^2 = b^2 - \frac{(b^2+a^2-c^2)}{4a^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{4a^2}$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

d'où le résultat.

2°) $S = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{a}{2}\,\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 4



Soit AH la hauteur issue de A.

1°) Dans les triangles AMC et AMB on a :

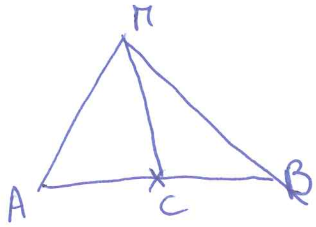
L3 Géométrie TD 1 p6

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overline{MB}\,\overline{MH}$

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2\overline{MC}\,\overline{MH} = MA^2 + MC^2 + 2\overline{MB}\,MH$

Ainsi $AB^2 + AC^2 = 2MA^2 + \cancel{2}MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + 2MC^2$

2° Soient A, B deux points fixes. Posons $AB = a$.



Soit M tel que

$MA^2 + MB^2 = k^2$

Si C est le milieu de AB, d'après la 1° question

$MA^2 + MB^2 = 2BC^2 + 2MC^2$ soit

$k^2 = 2\frac{a^2}{4} + 2MC^2$

Ainsi $MC^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

- Si $k^2 - \frac{a^2}{2} < 0$, il n'existe aucun point M
- Si $k^2 - \frac{a^2}{2} = 0$, alors $MC^2 = 0$ et $M = C$
- Si $k^2 - \frac{a^2}{2} > 0$, M est sur le cercle de centre C et de

rayon $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Vérifions que tous les points de ce cercle vérifient les hypothèses. Si M_1 est sur ce cercle

$CM_1^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

Donc $M_1A^2 + M_1B^2 = 2M_1C^2 + 2AC^2$

$= k^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = k^2$

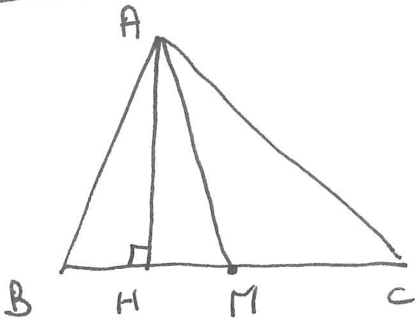
Ainsi $M_1A^2 + M_1B^2 = k^2$.

3°) De la question 1, on déduit

$MA^2 = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - 2\frac{a^2}{4}\right) = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}$

L3 géométrie TD1 p7

Exercice 5



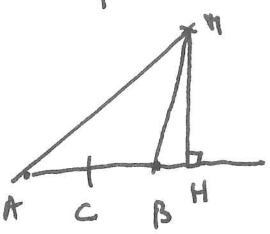
1°) Soit un triangle ABC, AM et AH respectivement la médiane et la hauteur issue de A.

On a

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2\,\overline{MB}\cdot\overline{MH}$$
$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2\,\overline{MC}\cdot\overline{MH} = MA^2 + MC^2 + 2\,\overline{MB}\cdot\overline{MH}$$

D'où $AB^2 - AC^2 = -4\,\overline{MB}\cdot\overline{MH} = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{MH}$

2°) Soient A, B deux points fixes donnés. On cherche le lieu des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k^2$.



Soit C le milieu de AB et H le pied de la perpendiculaire issue de M sur AB. On a d'après 1°:

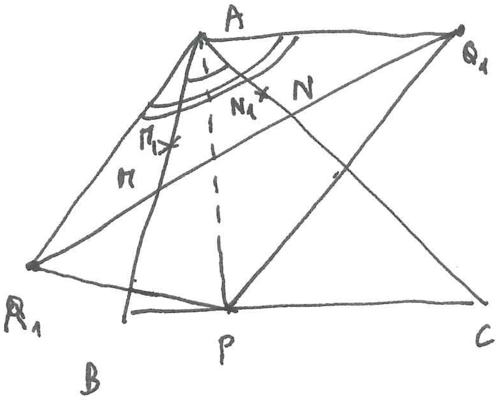
$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overline{AB}\cdot\overline{CH} = k^2$$

D'où si on pose $\overline{AB} = a$,

$$\overline{CH} = \frac{k^2}{2a}$$

Ainsi H est fixe et M est sur la perpendiculaire à AB passant par H tel que $\overline{CH} = \frac{k^2}{2a}$. Réciproquement, si M est sur cette droite il vérifie $MA^2 - MB^2 = 2\,\overline{AB}\cdot\overline{CH} = 2a\cdot\overline{CH} = 2a\,\frac{k^2}{2a} = k^2$. Donc M appartient au lieu.

Exercice 6



Soit un triangle ABC, $P \in [BC]$ et Q_1 et R_1 les symétriques de P par rapport à AC et AB. Les triangles APQ_1 et APR_1 sont parallèles donc

$$\widehat{R_1AQ_1} = \widehat{BAP} + \widehat{BAC} + \widehat{PAC} = 2\,\widehat{BAC}$$

et cet angle est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Donc la droite Q_1R_1 coupe AB et AC en M et N situés à l'extérieur des segments [AB] et [AC]. On a

L3 géometrie TD1 p8

périmètre du triangle $PMN = PN + MN + MP = NQ_1 + MN + NR_1 = Q_1R_1$.

Soient M_1 et N_1 deux points quelconques de AB et AC. Alors

$PN_1 + N_1M_1 + PM_1 = R_1M_1 + M_1N_1 + N_1Q_1 \geq R_1Q_1$. Ainsi pour

P fixé, la longueur $PM + MN + NP$ est minimale. Nous

devons trouver P pour minimiser cette dernière longueur. Dans

le triangle AR_1Q_1, l'angle $\widehat{R_1AQ_1}$ est constant et les

côtés AR_1 et AQ_1 sont égaux à AP_1. Ce triangle est isocèle. Donc

la base de ce triangle est minimale lorsque la longueur des côtés

est minimale. Comme chaque côté est égal à AP, la minimalité

est obtenue lorsque $AP \perp BC$ c'est-à-dire si P est le pied de

la hauteur issue de A.

$\boxed{\text{Exercice 7}}$