Exercice 1

On a $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QP'}} = \lambda$, $\dfrac{\overline{Q'P}}{\overline{Q'P'}} = -\lambda$.

On en déduit $\overline{QP} = \lambda \overline{QP'}$

$$\overline{PP'} = \overline{QP'} - \overline{QP} = \overline{QP'} - \lambda\overline{QP'} = (1-\lambda)\overline{QP'}$$

De même $\overline{Q'P} = -\lambda\overline{Q'P'} = -\lambda(\overline{Q'P} + \overline{PP'}) = -\lambda(\overline{Q'P} + (1-\lambda)\overline{QP'})$

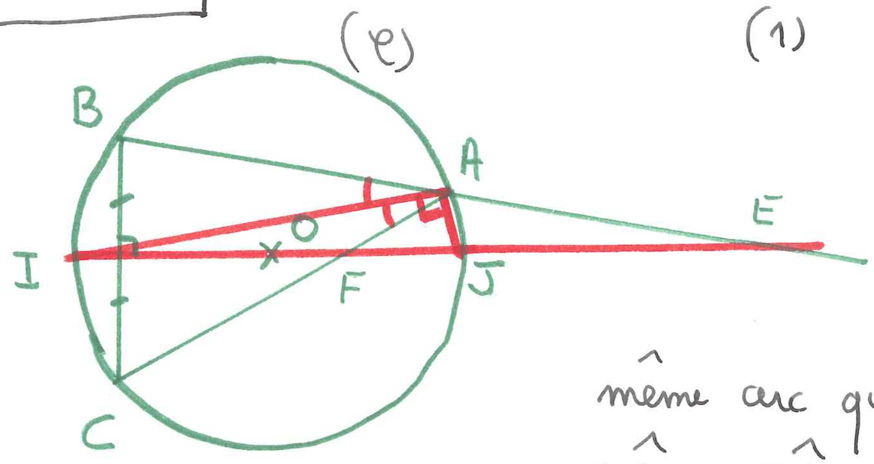
d'où $(1+\lambda)\overline{Q'P} = -\lambda(1-\lambda)\overline{QP'}$.

Ainsi $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \dfrac{-\lambda\overline{QP'}}{+\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda}\overline{QP'}} = -\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$.

Comme $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q}} \times \dfrac{\overline{P'Q}}{\overline{P'Q'}} \times \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ'}} = \lambda \times \dfrac{\overline{P'Q}}{\overline{P'Q'}} \times \left(-\dfrac{1}{\lambda}\right) = -\dfrac{\overline{P'Q}}{\overline{P'Q'}}$

on obtient $\dfrac{\overline{P'Q}}{\overline{P'Q'}} = -\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}} = \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$

Exercice 2



(1) Par hypothèse l'arc $\widehat{IB}$ est égale à l'arc $\widehat{IC}$. Donc sur le cercle (e) l'angle $\widehat{BAI}$ intercepte le même arc que l'angle $\widehat{IAC}$. Donc $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$ donc AI est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Comme $\widehat{IAJ} = \frac{\pi}{2}$ (IJ est un périmètre) $AJ \perp AI$ et AJ est la bissectrice externe de $\widehat{BAC}$ (Notons que si AI est la bissectrice externe, alors AJ est la bissectrice interne)

(2). On en déduit que $(I\,J\,F\,E)$ forment une division harmonique. Donc

$$\frac{\overline{IE}}{\overline{IF}} : \frac{\overline{JE}}{\overline{JF}} = -1$$

soit $$\frac{\overline{IE}}{\overline{IF}} = -\frac{\overline{JE}}{\overline{JF}}$$

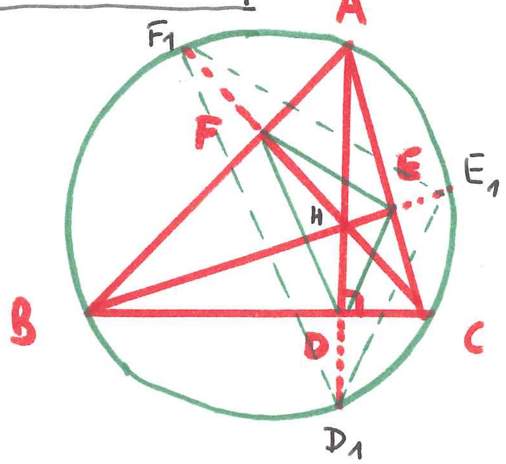
(3) Comme O est le milieu de IJ, d'après la formule de Newton on a

$$\overline{OE}\cdot\overline{OF} = OI^2 = OJ^2$$

Si R est le rayon du cercle, on obtient donc

$$\overline{OE}\cdot\overline{OF} = R^2$$

Exercice 3



1) Soit D_1, E_1, F_1 les symétriques de H par rapport à BC, AC et AB. D'après l'exercice 2, TD1, les points E_1, F_1 et D_1 sont sur le cercle circonscrit à ABC et les hauteurs de ABC sont les bissectrices du triangle $D_1E_1F_1$. D'après le théorème de Thalès, dans le triangle HF_1D_1, la droite FD passe par les milieux des côtés HF_1 et HD_1, donc $FD \parallel F_1D_1$. De même $E_1D_1 \parallel ED$ et $E_1F_1 \parallel EF$. Les triangles EFD et $E_1F_1D_1$ sont homothétiques. Donc D_1H qui est bissectrice en D_1 de $D_1F_1E_1$ est transformée en elle même. C'est la bissectrice en D de FDE.

Il en est de même pour les deux autres hauteurs du triangle ABC.

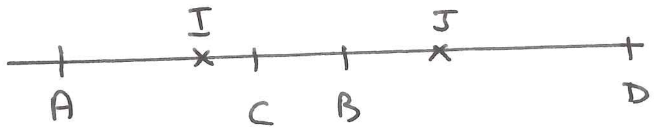
2. Considérons le faisceau $(E, (A, H, P, D))$. La droite EH est bissectrice de l'angle (EP, ED). Comme $EA \perp EH$, EA en est la bissectrice extérieure. Ceci implique l'harmonicité du faisceau.

3. Comme la division (A, H, E, D) est harmonique, d'après la relation de Descartes, on a

$$\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

ce qui est demandé.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$



1) $(A, B, C, D) = -1$

c.a.d

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = -1$$

soit $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \iff \overline{AC}\,\overline{BD} + \overline{AD}\,\overline{BC} = 0$

On en déduit $(\overline{AM} + \overline{MC})(\overline{BM} + \overline{MD}) + (\overline{AM} + \overline{MD})(\overline{BM} + \overline{MC}) = 0$

soit $2\,\overline{AM} \cdot \overline{BM} + 2\,\overline{MC}\,\overline{MD} = -\overline{AM}(\overline{MC} + \overline{MD}) - \overline{BM}(\overline{MC} + \overline{MD})$

$$= -(\overline{AM} + \overline{BM})(\overline{MC} + \overline{MD})$$

$$= -(\overline{AI} + \overline{IM} + \overline{BI} + \overline{IM})(\overline{MJ} + \overline{JC} + \overline{MJ} + \overline{JD})$$

$$= -2\,\overline{IM} \cdot \overline{MJ}$$

D'où $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 2\overline{MI} \cdot \overline{MJ}$

L3 Géométrie TD2 pg 4

2° Supposons $M = I$. On obtient
$$\overline{IA}\cdot\overline{IB} + \overline{IC}\cdot\overline{ID} = 0$$

Or $\overline{IA} = -\overline{IB} = -\frac{\overline{AB}}{2}$

$$\overline{IC}\cdot\overline{ID} = (\overline{IJ}+\overline{JC})(\overline{IJ}+\overline{JD}) = \overline{IJ}^2 + \overline{IJ}(\overline{JC}+\overline{JD}) + \overline{JC}\cdot\overline{JD}$$
$$= \overline{IJ}^2 + \left(-\frac{\overline{CD}}{2}\,\frac{\overline{CD}}{2}\right)$$

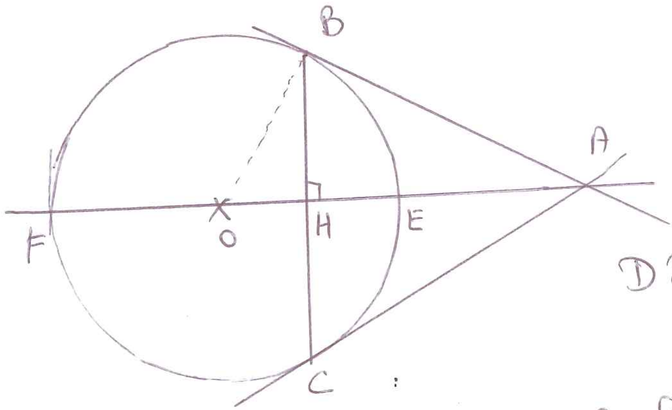
D'où $-\frac{\overline{AB}^2}{4} + \overline{IJ}^2 - \frac{\overline{CD}^2}{4} = 0$

Soit $\boxed{\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\overline{IJ}^2}$

3°) Données : $CD = \ell_1$, $AB = \ell_2$, I milieu de A, B, A et B.

Ainsi $IJ^2 = \frac{\ell_1^2+\ell_2^2}{4}$. Comme I est fixé, on déduit J. Comme $JC = \frac{\ell_1}{2}$, on déduit C.

Exercice 5



1° On a $\vec{OB}\cdot\vec{OA} = \overline{OH}\cdot\overline{OA}$

Or $\vec{OB}\cdot\vec{OA} = \vec{OB}\cdot(\vec{OB}+\vec{BA})$
$= \vec{OB}^2$ car $\vec{OB}\cdot\vec{BA} = 0$

D'où $\overline{OH}\cdot\overline{OA} = OB^2 = OE^2 = OF^2$

D'après la relation de Newton,
$(A, H, E, F) = -1$

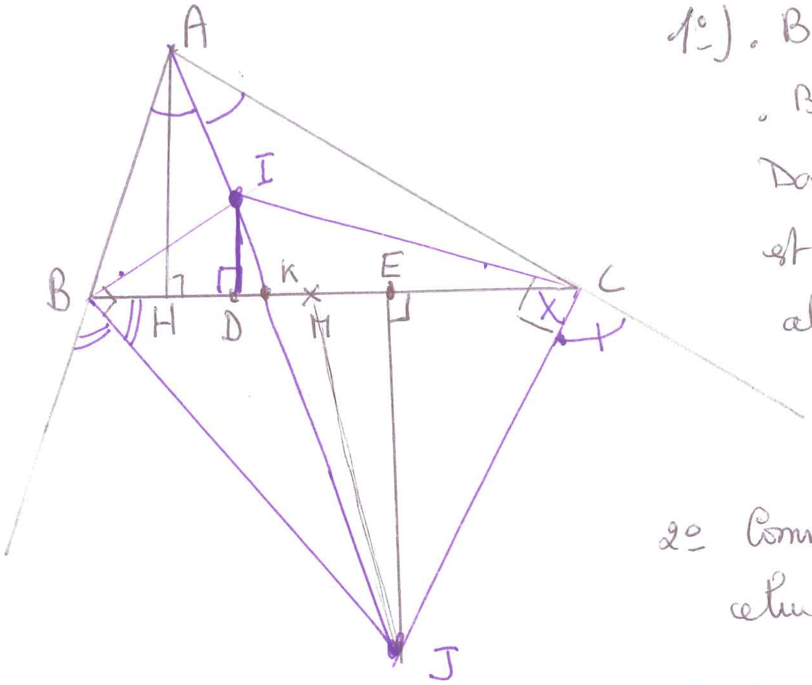
et le faisceau $\{B, \{A, H, E, F\}\}$ est harmonique

2°) D'après la première question $\overline{OA}\cdot\overline{OH} = R^2$

Remarque. Pour montrer que $\{B, \{A, H, E, F\}\}$ est harmonique on aurait pu constater que BH est la bissectrice de l'angle OBE (le triangle OBE est équilatéral) et BA la bissectrice externe. Ceci est suffisant pour dire que ce faisceau est harmonique.

L3 Géométrie TD 2 p5

Exercice 6



1°). BI est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$

. BJ est la bissectrice externe.

Donc le faisceau $\{B, \{BA, BI, BK, BJ\}\}$ est harmonique. Comme A I K J sont alignés, on a

$$\{A, K, I, J\} = -1$$

2° Comme H est le projeté de A sur BC, D celui de I, K celui de K, E celui de J

on en déduit

$$\{H, K, D, E\} = -1 .$$

3°